Kern und Bild einer Matrix

1. Motivation

Zur theoretischen Beschreibung der Abbildungen durch Matrizen wurden Begriffe eingeführt, die eine "elegante" Formulierung erlauben. In Linearen Gleichungssystemen lässt sich damit auch "eleganter" die Lösungsstruktur angeben. Für die nur praktische Anwendung, z.B. die Lösung eines Gleichungssystems ergibt sich so keine Erleichterung!

Interpretation der Gleichung $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

- Eine rein mathematische Operation - Matrix x Vektor = neuer Vektor. Dabei ist der Vektor als 1-spaltige Matrix definiert.
- Abbildung eines Vektors - Eine Abbildung s transformiert den Vektor **x** in den Vektor **y**. Zur Berechnung dieser Abbildung wird die Matrix **A** benutzt. Jede lineare Abbildung kann durch die Matrixformulierung ausgedrückt werden und jede Matrixformulierung entspricht einer linearen Abbildung.
- Kürzere Schreibweise eines linearen Gleichungssystems.

2. Kern

2.1 Definition, Zusammenhang mit dem Linearen Gleichungssystem ("LGS")

Gegeben ist eine Abbildung eines Vektors **x** auf einen Vektor **b**.
Die Abbildung sei als Matrix · Vektor - Multiplikation definiert: $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$
{Trivial ist, dass die Strukturen so sein müssen, dass die Multiplikation möglich ist. Wenn **A** eine m x n Matrix ist, also m Zeilen und n Spalten, muss **x** ein Vektor mit n Zeilen sein, $\mathbf{x} \in R^n$, und **b** ein Vektor mit m Zeilen, $\mathbf{b} \in R^m$. Dann ist die Struktur $(m \times n) \cdot (n) \rightarrow (m)$ bzw. $(m \times n) \cdot (n \times 1) \rightarrow (m \times 1)$. Die dazugehörende Abbildung ist s: $R^n \rightarrow R^m$.}

Der *Kern der Matrix* **A** ist die Menge aller Vektoren **x**, die als Ergebnis einen Nullvektor liefern: $\text{Kern}(\mathbf{A}) = \{\, \mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\}$ Im englischen Sprachraum verwendet man "nullspace". Das drückt direkt aus, dass dies Vektoren eines Vektorraums sind, die in der Abbildung zu einem Nullvektor führen.

{R^n ist der Vektorraum, in dem die Vektoren **x** definiert sind. **0** ist der Nullvektor im Vektorraum R^m.}

Wenn man $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als LGS auffasst, ist **x** die Lösungsmenge des homogenen LGS. Ein möglicher Vektor **x** liegt stets vor: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist die triviale Lösung. ($\text{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$. Alternativ kann man dafür sagen, "es gibt keinen Kern".)

Angewandt auf das homogene LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ist $\mathbf{x} = \text{Kern}(\mathbf{A})$.

Es besteht ein direkter Zusammenhang mit dem Rang der Matrix:

$\text{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \text{rang}(\mathbf{A}) = n$
n ist die Anzahl der Variablen. Wenn der Kern nur aus dem Nullvektor besteht, gibt es nur diese 1 triviale Lösung. Anderenfalls sind unendlich viele Lösungen des homogenen LGS möglich, mit jeweils mindestens einem freien Parameter.

Ein noch weiter führender Zusammenhang wird an Beispielen erkennbar und endgültig nach Einführung des "Bildes" formuliert!

Bei quadratischen Matrizen ist eine Entscheidung, ob Kern = {**0**}, über die *Determinante* möglich: det(**A**) $\neq 0 \Rightarrow$ Es gibt nur Kern(**A**) = { **0** }.

2.2 Lineare Abhängigkeit (siehe auch V02)

Gegeben ist eine Linearkombination ("LC")
LC = $t_1\,\mathbf{a_1} + t_2\,\mathbf{a_2} + \ldots + t_n\,\mathbf{a_n}$
Besteht für die LC lineare Abhängigkeit?

- Linear unabhängig: LC = **0**, nur wenn alle $t_i = 0$
- Linear abhängig: LC = **0**, wenn mindestens ein $t_i \neq 0$

Für die nachfolgende Behandlung wird die Angabe benötigt, wie viele Vektoren in einer Menge linear unabhängig sind. Interessant sind dabei auch "Sonderfälle". Ist es möglich, dass 0 Vektoren linear unabhängig sind? Was gilt für den Nullvektor?
♦ **Nullvektor**: Der Nullvektor ist linear abhängig. Begründung: Es gilt t **0** = **0** für t $\neq$ 0.
♦ **1 einzelner Vektor**, der nicht der Nullvektor ist: t **a** = **0** gilt nur, wenn t = 0. Ein einzelner Vektor ist linear unabhängig.

- n Vektoren - alle nicht **0**: 1 bis n Vektoren können linear unabhängig sein, aber nicht 0.
- n Vektoren - alle nicht **0**: 1 bis (n-1) Vektoren können linear abhängig sein, aber nicht n. Begründung: Vektoren **a**, **b**, **c** und lineare Abhängigkeit **b** = t1 **a**, **c** = t2 **a**. Die Summe (LC) ist (1 + t1 + t2) **a** = t **a**. t **a** kann nicht auch noch linear abhängig sein.
- n Vektoren - alle **0**: Jeder Vektor ist dann von allen anderen linear abhängig, wegen t **0** = **0** mit t $\neq$ 0. Als Konstruktion einer Menge ist das aber nicht sinnvoll, weil { **0**, **0**, ... ,**0** } → { **0** }.
- n Vektoren - darunter **0**: Gegebenenfalls werden zuerst Duplikate entfernt. { **a**, **0**, **b**, **0**, **0**, **a** } → { **0**, **a**, **b** }. **0** ist linear abhängig, von den anderen Vektoren ist mindestens einer linear unabhängig.

Unmöglich sind 0 linear unabhängige Vektoren, außer für {**0**}. Unmöglich sind n linear abhängige Vektoren, außer für {**0**}. {**0**} hat 1 linear abhängigen Vektor 0.

2.3 Vektorraum

Eine präzise mathematische Beschreibung wird den Begriff über eine Gruppe, einen Körper und eine Abbildung einführen. Vereinfacht können die endgültigen Regeln sofort angegeben werden.
Ein **Vektorraum** ist eine Menge von Vektoren, für die einige Regeln gelten müssen. s und t sind im Folgenden reelle Zahlen. Alles entspricht den von der "üblichen" Vektorrechnung her bekannten Gesetzen.

1) (s + t) **a** = s **a** + t **a**
2) s (**a** + **b**) = s **a** + s **b**
3) s (t **a**) = (s t) **a**
4) 1 **a** = **a**

Dimension eines Vektorraums V = maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V. Hat ein Vektorraum die Dimension n, nennt man die n Vektoren eine **Basis** von V (oder die **Basisvektoren** von V).

In der Komponenten- bzw. Koordinatendarstellung haben die Vektoren eines n-dimensionalen Vektorraums auch n Komponenten (Koordinaten).
Eine (nicht leere) Teilmenge von V heißt **Unterraum**. Der Unterraum kann aber auch identisch zu V sein.
Bedingung dabei: Sei **x**, **y** ϵ U (Unterraum). Dann muss auch eine Linearkombination davon in U sein: (s **x** + t **y**) ϵ U.
Beispiel:
Vektorraum V = R^2. **a** und **b** seien Vektoren in R^2.
Einige mögliche Unterräume U:
U = R^2 (erlaubt als nicht echte Teilmenge)
U = {**0**} (erlaubt ist t **a** und t = 0)
U = {2 **a** - 2,345 **b**} (erlaubte Linearkombination mit reellen Zahlen)

2.4 Beispiele zur Berechnung des Kerns

B1 **A** = $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$; det(**A**) = $\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}$ = -2

Lösung von **A x** = **0** → **A** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ mit Gauß-Eliminationsverfahren:

$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -2\end{pmatrix}$ → -2 y = 0 → y = 0 → x = 0 → **x** = $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ = **0**

⇒ Kern(**A**) = {**0**}

Übereinstimmend mit det(**A**) ≠ 0.

Der Nullvektor ist linear abhängig. {**0**} besteht aus 1 Element, es liegen 0 linear unabhängige Vektoren vor: dim (Kern(**A**)) = 0

B2 **A** = $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$; det(**A**) = $\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{vmatrix}$ = 0

$\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}$ → x +2 y = 0 → sei y = t → x = -2 t → **x** = t $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

⇒ Kern(**A**) = { t $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ } (vorläufig)

Da wegen der (vorausgesetzten) linearen Verknüpfung jede Linearkombination von Vektoren **x**, die einzeln jeweils **A x** = **0** erfüllen, auch **0** liefert, muss dies nicht gesondert in der Angabe der Menge genannt werden. Die Angabe von t ist daher unnötig. Dazu passt auch die Angabe der Dimension des Kerns. Es liegt nur 1 linear unabhängiger Vektor vor, daher dim(Kern(A)) = 1.

⇒ Kern(**A**) = { $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ }

B3 **A** = $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$; det(**A**) = $\begin{vmatrix}5 & 6\\8 & 9\end{vmatrix}$ - 2 $\begin{vmatrix}4 & 6\\7 & 9\end{vmatrix}$ + 3 $\begin{vmatrix}4 & 5\\7 & 8\end{vmatrix}$ = -3 + 12 -9 = 0

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

3 y + 6 z = 0 → sei z = t → y = - 2 t → x = 4 t - 3 t = t → **x** = $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ = t $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

⇒ Kern(**A**) = { $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ }

Wie bei 2) dim(Kern(**A**)) = 1

B4 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; det(**A**) = $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ - 2 $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}$ + 3 $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$ = -3 + 36 -39 = -6

Wegen det(**A**) ≠ 0 ist Kern(**A**) = {**0**} zu erwarten. Ebenso dim(Kern(**A**)) = 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -10 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to x = y = z = 0 \to \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Kern(**A**) = {**0**}

Kontrolle, dass **A x** = **0** für **x** = Kern(**A**):

♦ **B1**: Kern(**A**) = { $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ } ≡ {**0**} in R^2 // **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1 · 0 + 2 · 0 = 0 // 3 · 0 + 4 · 0 = 0 ✓

♦ **B2**: Kern(**A**) = { $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ } // **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1 · (-2) t + 2 · t = 0 // 2 · (-2) t + 4 · t = 0 ✓

♦ **B3**: Kern(**A**) = { $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ } // **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

1 · t + 2 · (-2) t + 3 · t = 0 // 4 · t + 5 · (-2) t + 6 · t = 0 // 7 · t + 8 · (-2) t + 9 · t = 0 ✓

♦ **B4**: Kern(**A**) = { $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ } ≡ {**0**} in R^3 // **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

1 · 0 + 2 · 0 + 3 · 0 = 0 // 4 · 0 + 5 · 0 + 6 · 0 = 0 // 9 · 0 + 8 · 0 + 9 · 0 = 0 ✓

2.5 Vergleich Kern(A) / Lineare Abhängigkeit in A (an den Beispielen 2.4)

Die Anzahl linear unabhängiger Vektoren in Kern(**A**) ist jeweils als Dimension schon bekannt: **B1**: 0 // **B2**: 1 // **B3**: 1 // **B4**: 0

Die mögliche lineare Abhängigkeit in **A** sehen wir jeweils "mit einem Blick", eventuell unterstützt durch das Kriterium det(**A**) = 0. Anzahl linear unabhängiger Vektoren:
B1: 2 (2 linear unabhängige Zeilen / Spalten)
B2: 1 (1 linear abhängige Zeile / Spalte; Z2 = 2 Z1 oder S2 = 2 S1)
B3: 2 (1 linear abhängige Zeile / Spalte; Z3 = 2 Z2 - Z1 oder S3 = 2 S2 - S1)
B4: 3 (3 linear unabhängige Zeilen / Spalten)

Offenkundig gibt es einen weiteren Zusammenhang, wenn wir die Anzahl linear unabhängiger Vektoren (für die Zeilen oder Spalten) von **A** mit Kern(**A**) vergleichen.

> Nach der Einführung des "Bildes" wird das hier im Beispiel gefundene Ergebnis als allgemein gültiger Satz definiert werden!

		A	Kern(**A**)	Summe
R^2	**B1**	2	0	2
	B2	1	1	2
R^3	**B3**	2	1	3
	B4	3	0	3

Die Summe ist jeweils gleich der Anzahl der Unbekannten, also der Dimension des Vektorraums für die Lösung **x**.

Für R^2 ist kein weiterer Fall möglich. Nach 2.2 ist "0 linear unabhängige Vektoren" in **A** nicht möglich.

Für R^3 sollte gelten: 1 linear unabhängiger Vektor in **A** und Dimension 2 für Kern(**A**). Auch das liefert die Summe 3! Beispiel **B5** zeigt eine konkrete Möglichkeit dazu.

B5 **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; nur 1 linear unabhängiger Vektor (Zeile oder Spalte) in **A**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x + 2y + 3z = 0 \rightarrow$ sei $y = s$, $z = t \rightarrow x = -2s - 3t$

$\rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Kern(**A**) = { $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ } (lineare Hülle der beiden angegebenen Vektoren)

Wie erwartet, also 2 linear unabhängige Vektoren, und damit dim(kern(**A**)) = 2

3. Bild

3.1 Definition

Wie vorher beschreibt **A x** = **b** eine lineare Abbildung.
Das *Bild der Matrix* **A** ist die Menge aller Vektoren **y**, die als Ergebnis der Multiplikation für alle möglichen **x** erhalten werden. Dabei ist **x** eine Teilmenge (Unterraum) der (maximal möglichen) Definitionsmenge (Vektorraum) und **y** eine Teilmenge (Unterraum) der (maximal möglichen) Wertemenge (Vektorraum).

Bild(**A**) = { **y** | **A x** = **y** }

Das entspricht den gewohnten Angaben bei Funktionen. In y = f(x) ist x in der Definitionsmenge enthalten, y ist die Wertemenge. Beides können Teilmengen sein. Wenn x irgendeine reelle Zahl ist, $x \in R$, und y auch eine reelle Zahl ist, ist für f(x) = sin(x), die Wertemenge eine Teilmenge, $y = \{y \in R \mid -1 \leq y \leq +1\}$.

Bei der Matrixgleichung **A x** = **b** ist daraus ersichtlich, dass eine Lösung für **b** in der Wertemenge, also Bild(**A**), enthalten sein muss. In Bild(**A**) ist angegeben, welche Vektoren entstehen können, wenn alle möglichen **x** eingesetzt werden. **b** ist ein spezieller Fall davon für ein spezielles **x**.

3.2 Beispiel **1**, zur Matrix **A** von vorigem Beispiel **B1**.

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Im letzten Schritt nur Umbenennung von x,y in s,t

Wie beim Kern können wir erklären, dass wir nur "Grundvektoren" angeben und alle Linearkombinationen davon (also die "lineare Hülle") auch zur Menge gehören.

$\Rightarrow$ Bild(**A**) = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ } (vorläufig!)

Wählen wir einen speziellen Vektor davon, z.B. **b** = $2\binom{1}{3} - 3\binom{2}{4} = \binom{-4}{-6}$, sehen wir, dass **x** = $\binom{2}{-3}$ auch eine Lösung von **A x** = **b** ist.

Dass die rechte Seite des Gleichungssystems auch als Vektor des Bildes vorkommen muss, ist also erfüllt.

Bei Bild(**A**) können wir aber zusätzlich überlegen, welche Vektoren als Linearkombination der beiden angegebenen möglich sind. Wir sehen, dass dies alle Vektoren von R^2 sind, weil die beiden angegebenen Vektoren linear unabhängig sind und damit eine Basis von R^2 bilden.

$\Rightarrow$ Bild(**A**) = R^2 (endgültig)

In diesem Fall würde die Kenntnis des Bildes wenig bei der Suche nach den möglichen **b** im Gleichungssystem **A x** = **b** helfen. Wir wissen nur, dass auf der rechten Seite zwei Zahlen vorkommen können.

3.3 Bestimmung ("Berechnung") des Bildes

Wesentlich wichtiger ist eine hier am Beispiel - aber *allgemein gültige* - erhaltene Berechnungsvorschrift!

➔ Bild(**A**) enthält die lineare Hülle der linear unabhängigen Spaltenvektoren von **A**!

Eine Abbildung ist durch **A x** beschrieben. Der Spaltenvektor **x** enthalte n Komponenten, dann besitzt die Matrix **A** n Spalten (und m Zeilen).

$$\mathbf{A\,x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{a_1} \quad \dots \quad \mathbf{a_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\,\mathbf{a_1} + x_2\,\mathbf{a_2} + \dots + x_n\,\mathbf{a_n}$$

Das Ergebnis der Abbildung, das Bild der Matrix **A**, ist eine Linearkombination der Spaltenvektoren von **A**. Man kann noch die linearen Abhängigkeiten entfernen, und dann bleibt eine Linearkombination aus einer Menge linear unabhängiger $\mathbf{a_i}$ übrig. Dies ist die lineare Hülle dieser Menge $\{\mathbf{a_i}\}$.

Die Anzahl linear unabhängiger Vektoren haben wir in 2.5 schon jeweils ermittelt. Es ist nur noch eine zusätzliche Interpretation nötig. Wir betrachten die Zeilen / Spalten von **A** als Vektorraum. Dann ist diese Anzahl die Dimension von **A**. Daraus folgt wieder eine *allgemein gültige* Beziehung.

➔ dim(Bild(**A**)) + dim(Kern(A)) = dim(V)

V ist dabei der Vektorraum, in dem **x** definiert ist.

3.4 Beispiel 2 - zu **B2** von vorher

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{y} = \mathbf{A\,x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \binom{x}{y} = \binom{x+2y}{2x+4y} = x\binom{1}{2} + y\binom{2}{4} = s\binom{1}{2} + t\binom{2}{4}$

Jetzt besteht lineare Abhängigkeit!

Das hätten wir auch direkt gesehen, wenn wir die beiden Spalten aus **A** benutzt hätten.

$\Rightarrow$ Bild(**A**) = $\{ \binom{1}{2} \}$

Nicht mehr alle Vektoren aus R^2 können als rechte Seite zu einer Lösung von **A x** = **b** vorkommen!

a) Sei $\mathbf{b} = \binom{3}{7}$, also nicht in Bild(**A**) enthalten.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: Widerspruch "0 = 1", also keine Lösung

b) Sei $\mathbf{b} = \binom{3}{6}$, also in Bild(**A**) enthalten.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: x + 2y = 3; sei y = t; $\mathbf{x} = \binom{3-2t}{t} = \binom{3}{0} + t\binom{-2}{1}$

Es gibt eine Lösung, mit 1 freiem Parameter.

Diese Lösung zeigt einen Zusammenhang, der auch wieder allgemein gilt:

$\binom{3}{0}$ ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems, denn 1·3+2·0 = 3

$t\binom{-2}{1}$ íst die Lösung des homogenen Systems, also Kern(A)

Allgemeine Regel:

➔ Die Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der Lösung des homogenen Systems.

Wenn für das homogene System Kern(**A**) = {**0**}, dann ist eine gefundene spezielle Lösung auch die einzige Lösung.

3.5 Beispiel 3 - zu **B3** von vorher.

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; dafür berechnet: Kern(**A**) = { $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ } // Sei $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 34 \end{pmatrix}$

Lösung des inhomogenen Systems (wie üblich, durch Gauß-Elimination)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 22 \\ 7 & 8 & 9 & 34 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -18 \\ 0 & -6 & -12 & -36 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 freier Parameter, sei z = t;

-3 y - 6 t = -18 → y = -2 t + 6 → x - 4 t + 12 + 3 t = 10 → x = t - 2

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2+t \\ 6-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (entspricht "spezieller Lösung + Kern")

Zur Berechnung des Kerns wurden dieselben Zeilenumformungen benutzt! Auch wenn eine spezielle Lösung schon bekannt ist, ist der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung eines inhomogenen Systems beim Standardverfahren (Gauß-Elimination für die erweiterte Koeffizientenmatrix) fast gleich.

Was ist Bild(**A**)? Wir verwenden die allgemeine Vorschrift "Bild(**A**) enthält die lineare Hülle der linear unabhängigen Spaltenvektoren von **A".**

⇒ Bild(**A**) = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ } (vorläufig!)

Es liegt eine lineare Abhängigkeit vor: $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$; dieser Vektor kann aus der Liste gestrichen werden, weil Bild(**A**) die lineare Hülle der angegebenen Vektoren ist, d.h. alle linear abhängigen Vektoren per Definition schon enthalten sind.

$\Rightarrow$ Bild(**A**) = { $\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$ }

Die Abbildung **A x** liefert für alle möglichen Vektoren des Definitionsraums R^3 nicht mehr alle möglichen Vektoren in R^3, sondern als Wertemenge nur einen Unterraum. Geometrisch ist dies eine Ebene in R^3.

Die benutzte rechte Seite **b** = $\begin{pmatrix}10\\22\\34\end{pmatrix}$ ist in Bild(**A**) enthalten: $\begin{pmatrix}10\\22\\34\end{pmatrix}$ = (-2) $\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$ + 6 $\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$;
wir erwarten - und finden auch - eine Lösung für **x**.

Wird ein Vektor **b** gewählt, der nicht in Bild(**A**) enthalten ist, sollten wir keine Lösung finden.
Sei **b** = $\begin{pmatrix}10\\22\\\mathbf{35}\end{pmatrix}$. Dann liefert die Gauß-Elimination einen Widerspruch:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&10\\4&5&6&22\\7&8&9&\mathbf{35}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&10\\0&-3&-6&-18\\0&-6&-12&\mathbf{-35}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&10\\0&-3&-6&-18\\0&0&0&\mathbf{1}\end{pmatrix} \rightarrow \text{"0=1"}$$

3.6 Weiterer Zusammenhang

Das Bild enthält die linear unabhängigen Spalten der Matrix A. Deren Anzahl ist die Dimension des entsprechenden Unterraums. Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen / Spalten einer Matrix wurde auch als Rang definiert. (Der Zeilen- und der Spaltenrang sind gleich!). Der Vergleich der beiden Aussagen zeigt:
➔ rang(**A**) = dim(Bild(**A**))

(Eine eingehende Besprechung zur Struktur der Lösungen bei LGS mit 3 Unbekannten unter Verwendung des Rangs liegt in Z05 vor!)

Die Dimension des Kerns wir auch **Defekt** genannt.
Damit kann man auch schreiben: defekt(**A**) + rang(**A**) = dim(**V**)

3.7 Beispiel 4 - Konstruktion einer Matrix **A**, die zu einem gewünschten Bild führt.

Ein **x** aus der Definitionsmenge {**x** ϵ R^3} soll durch **A** in eine Gerade in R^3 abgebildet werden. Die Abbildung soll also nur Elemente eines Unterraums zu R^3 liefern.

Sei Bild(**A**) = { $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ }. Weil **x** 3 Komponenten hat, muss **A** 3 Spalten besitzen. (Zwei weitere sind von der ersten linear abhängig.) Beispiel: **A** = $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&6&9\\5&10&15\end{pmatrix}$

Dieses **A** liefert die gewünschte Abbildung:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&6&9\\5&10&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+3z\\3x+6y+9z\\5x+10y+15z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\9\\15\end{pmatrix} = (x+2y+3z)\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ für jedes **x** = $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ kollinear.

Hinweis: Bei der Festlegung von **A** haben wir direkt benutzt, dass dim(Bild(**A**)) = 1. Daher kann die Matrix **A** wegen rang(**A**) = 1 nur 1 linear unabhängige Spalte besitzen. Diese Spalte muss gleich dem als Bild definierten Vektor (oder einem Vielfachen davon) sein.

Die weiteren linear abhängigen Spalten erzeugen dann, wie an der Rechnung oben zu sehen, auch wieder nur Vielfache des Bild-Vektors. Insgesamt entsteht nur der geforderte 1 Bild-Vektor (und wegen der impliziten Voraussetzung "lineare Hülle" alle Vielfachen davon).

"defekt(**A**) + rang(**A**) = dim(**V**)" ist erfüllt, weil defekt(**A**) = dim(Kern(**A**)) = 2 und dim(**V**) = 3. Rechnung zum Kern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to x + 2\,y + 3\,z = 0 \to \text{sei } y = s,\ z = t \to x = -\,2\,s - 3\,t$$

$$\to \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Kern}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3.8 Ergänzender Hinweis

Mit bild(**A**) wird untersucht, welche Lösungen möglich sind, wenn die zur Matrix **A** korrespondierende Abbildung betrachtet wird. Eine Fragestellung ist für quadratische Matrizen interessant und von weitreichender Bedeutung. Welche Vektoren sind möglich, die bei der Abbildung eines Vektors einen Vektor mit gleicher (oder entgegengesetzter) Orientierung und nur mit verschiedenem Betrag (Länge) liefern. Welche Vektoren **v** erfüllen $\mathbf{A}\ \mathbf{v} = \lambda\ \mathbf{v}$? Man nennt dann **v** Eigenvektoren und λ Eigenwerte. {Offenkundig bilden die Eigenvektoren eine Teilmenge von bild(**A**).}

4. Weitere Übungen

Jeweils gesucht: Kern, Bild, Rang, Defekt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ - als LGS ist die rechte Seite dazu $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix}$

♦ **A**: Für jeden Vektor **x** ($\mathbf{x} \in R^2$) gilt $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Damit ist kern(**A**) = R^3. Alternativ kann man auch drei linear unabhängige Vektoren angeben, am einfachsten die Standardbasis.

kern(**A**) = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; defekt(**A**) = dim(Kern(**A**)) = 3

Damit erwarten wir wegen defekt(**A**) + rang(**A**) = dim(V) = dim(R^3) = 3 einen Rang 0.
A enthält als Spalten dreimal den Nullvektor, dieser ist linear abhängig, es liegen also 0 linear unabhängige Spalten vor. Damit bild(**A**) = {} und rang(**A**) = dim(bild(**A**)) = 0.

♦ **B**: $\mathbf{B}\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$ enthält dreimal die Zeile $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0$. Damit ist z = 0, und x, y sind freie Parameter. Für den Kern gilt damit

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und weil als Kern die lineare Hülle angegeben wird

kern(**B**) = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; defekt(**B**) = 2

B enthält zweimal den Nullvektor (linear abhängig), Spalte 3 ist linear unabhängig.

bild(**B**) = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ }, rang(**B**) = 1

Wie zu fordern, gilt defekt(**B**) + rang(**B**) = 3

B bildet einen Vektor **x** auf einen Vektor mit 3 gleichen Komponenten ab. (Wenn **x** aus dem Kern stammt, ist es der Nullvektor.) Allgemein:

B x = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$ = z $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

♦ **C**: Wegen der gleichen Struktur von **C** und **B** erwartet man auch defekt(**C**) = 2, aber (vielleicht) wegen der anderen Zahlen auch andere Zahlen in kern(**C**).
Das Gleichungssystem **C x** = **0** liefert aber: 0·x + 0·y + 1 (2, 3)·z = 0, also dreimal z = 0 und x, y als freie Parameter. Daher ist kern(**C**) derselbe Ausdruck wie kern(**B**)!

Auch in **C** ist die dritte Spalte linear unabhängig. Damit ist

bild(**C**) = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ }, rang(**C**) = 1

Kontrolle: **C x** = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ 3z \end{pmatrix}$ = z $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

♦ **D**: **D x** = **0** enthält dreimal die Zeile 0·x + 1·y + 1·z = 0. Damit ist y = - z, und x ein freier Parameter. Für den Kern gilt damit

x = $\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ -\mathrm{z} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}$ = x $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ + z $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit

kern(**D**) = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ }; defekt(**D**) = 2

D = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ enthält als Spalten den Nullvektor (linear abhängig) und zwei gleiche Spalten, es bleibt also 1 linear unabhängige Spalte.

bild(**D**) = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ }, rang(**D**) = 1

Kontrolle: **D x** = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y+z \\ y+z \end{pmatrix}$ = (y + z) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

♦ **E**: **E x** = **0** enthält die drei Gleichungszeilen 0·x + 1·y + 1 (2, 3)·z = 0. Weil nicht gelten kann, y = - 1 (2 ,3) z erzeugen wir zuerst die Dreieck-Stufenform.

E = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → z = 0; y = 0; x freier Parameter

x = $\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = x $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und kern(**E**) = { $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ }; defekt(**E**) = 1

Daraus folgt rang(**E**) = 2. Wir wählen zwei linear unabhängige Spalten

bild(**E**) = { $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ }

Kontrolle: **E x** = $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+z\\y+2z\\y+3z\end{pmatrix}$ = y $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ + z $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Anmerkung dazu:

(1) Nicht erlaubt ist: Zeilenumformungen durchführen (weil dies für die Bestimmung des Kerns schon gemacht ist) und dann die Spalten dieser neuen Matrix für die Angabe des Bilds verwenden.

(2a) Erlaubt ist: Spaltenumformungen durchführen und dann die Spalten der neuen Matrix für die Angabe des Bilds verwenden. Lineare Abhängigkeiten werden dabei leichter erkannt.

(2b) Erlaubt ist (alternativ): Wenn man lieber Zeilenumformungen durchführt - zuerst Transponieren, dann Zeilenumformungen, dann zurücktransponieren. Die Spalten sind für das Bild verwendbar.

Begründung: Die Matrix **A** als Vektor der Spalten geschrieben: **A** → ($\mathbf{a_1}$ $\mathbf{a_2}$ ... $\mathbf{a_n}$)
Dann ist **A x** die Linearkombination $\mathbf{a_1}$ x_1 + $\mathbf{a_2}$ x_2 + ... + $\mathbf{a_n}$ x_n. bild(**A**) enthält alle möglichen Linearkombinationen (lineare Hülle der angegebenen Vektoren). Wird für ein $\mathbf{a_i}$ eine Linearkombination der anderen $\mathbf{a_j}$ eingesetzt, ist der Vektor der neuen Summation auch in der Menge der Vektoren der ersten Summation enthalten.

Nach 2b): **E** = $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$ → (transponiert) $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$ → (umgeordnet) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

→ (Zeilenumformung) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ → (rücktransponiert) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\3&-2&0\end{pmatrix}$

Damit bild(**E**) = { $\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ }

Scheinbar ein anderes bild(**E**) als vorher, aber es gilt $\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und damit wird als lineare Hülle dieselbe Menge wir vorher erhalten.

♦ **F**: Als Abbildung gilt für diese 2 x 4 Matrix $R^4 \to R^2$. Der Vektorraum V hat damit die Dimension 4. Als LGS haben wir 2 Zeilen für 4 Unbekannte. "Mit einem Blick" sehen wir, dass die Koeffizientenmatrix und die erweiterte Koeffizientenmatrix 2 linear unabhängige Zeilen enthalten. Weil rang(**F**) = rang(**F|b**) gibt es eine Lösung mit 2 freien Parametern.

Weil Zeilenrang = Spaltenrang können nur 2 linear unabhängige Spalten vorliegen.
Es ist S3 = 2 S2 - S1 und S4 = 3 S2 - 2 S1.

Zur Erleichterung bei der Berechnung des Kerns die Gauß-Elimination:
F = $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\end{pmatrix}$

Daraus: $4\,x_2 = -8\,x_3 - 12\,x_4 \rightarrow x_2 = -2\,x_3 - 3\,x_4$

$x_1 = -2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4 \rightarrow x_1 = x_3 + 2\,x_4$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + 2x_4 \\ -2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{kern}(\mathbf{F}) = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

defekt(**F**) = 2

Für bild(**F**) wählen wir Spalte 1 und 2: bild(**F**) = $\{ \binom{1}{5}, \binom{2}{6} \}$. Weil diese beiden (linear unabhängigen) Vektoren den Raum R^2 aufspannen, kann auch bild(**F**) = R^2 geschrieben werden.

rang(**F**) = 2, und defekt(**F**) + rang(**F**) = dim(V) ist erfüllt.

Als LGS betrachtet, muss die rechte Seite **b** = $\binom{11}{15}$ in bild(**F**) vorkommen.

b liegt sicher in R^2. ✓

Wir überprüfen noch die Gültigkeit der allgemeinen Bedingung (3.4)

" Die Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der Lösung des homogenen Systems."

Eine spezielle Lösung ist mit $x_3 = x_4 = 0$ schnell gefunden.
Aus $x_1 + 2\,x_2 = 11$ und $5\,x_1 + 6\,x_2 = 15$ folgt $x_1 = -9$ und $x_2 = 10$.
Für die allgemeine Lösung verwenden wir den Kern mit den Parametern s und t.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieses **x** muss für beliebiges s, t (ϵ R) **b** als Ergebnis von **F x** liefern!

$1 \cdot [\,-9 + s + 2\,t] + 2 \cdot [10 - 2\,s - 3\,t] + 3\,s + 4\,t = 11$ ✓

$5 \cdot [\,-9 + s + 2\,t] + 6 \cdot [10 - 2\,s - 3\,t] + 7\,s + 8\,t = 15$ ✓