Homogene Koordinaten - Anschaulich (1)

Behandelt werden die Verschiebung, die Rotation und die Spiegelung in $\mathbf{R}^2$. (Damit lassen sich die Beziehungen auch leicht grafisch überprüfen; explizite Beispiele zur Verdeutlichung.)
{Dies ist eine Ergänzung zu "Lineare Algebra 2 /T01 - T05".}

1. Grund-Idee

♦ In der üblichen Vorgehensweise mit Vektoren ist für eine Translation eine Addition und für die Drehung eine Multiplikation nötig. Bei einer Spiegelung ist die Spiegelung an einem Punkt und Spiegelung an einer Achse zu unterscheiden.

♦ Bei Verwendung von homogenen Koordinaten ist für alle Operationen eine Multiplikation einer Matrix mit dem Vektor für die Punktkoordinaten nötig. Für eine Aufeinanderfolge mehrerer Transformationen kann eine einzige summarische Matrix berechnet werden.

⇒ Bei einer einmaligen manuellen Berechnung ist die Verwendung homogener Koordination kein oder nur ein geringer Vorteil. Wenn aber viele Punkte gleichartig verschoben / gedreht werden müssen, zeigt sich der Vorteil. Es wird nur einmal eine Matrix für die Kombinationen berechnet und diese Matrix kann dann (ohne neue Berechnung) auf alle Punkte angewandt werden.

♦ Hier wird die Vorgehensweise explizit dargestellt. Eine tiefergehende formale Analyse wird nicht durchgeführt.

2. Zusammenhang normale (inhomogene) und homogene Koordinaten

2a) Darstellung eines Punkts als Vektor

P(x | y) normal: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; x und y gelten für einen Koordinatenursprung **U**(0 | 0)

homogen: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Erweiterung um eine dritte Komponente, "**1**".

2b) Darstellung einer Drehung als Matrix

D(α) normal: $\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

D(α) homogen: $\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & \mathbf{0} \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Erweiterung um 1 Zeile und 1 Spalte

♦!!! In beiden Formeln ist wichtig, dass damit eine Drehung um den Koordinatenursprung **U** beschrieben wird. Wenn um einen anderen Punkt **P** gedreht wird, ist dies durch eine erweiterte Rechenvorschrift zu berücksichtigen!

3. Verschiebung als Vektoraddition bzw. als Multiplikation Matrix · Vektor

3a) Mit normalen Koordinaten

Verschoben (= Translation) werde um den Vektor $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Bekannt ist: Als frei verschiebbarer Vektor wird **t** am Ende von **p** angesetzt, das Ergebnis ist dann der neue Vektor **p'**. Die neuen Koordinaten von **p'** sind immer noch bezogen auf das Ausgangs-Koordinatensystem {Ursprung **U,** üblicherweise **U(0 | 0)}.**

$\mathbf{p'} = \mathbf{p} + \mathbf{t} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$

Dieses Resultat kann verschieden interpretiert werden.

a) **P'**(x+a | y+b) sind die neuen Koordinaten nach der Verschiebung im alten Koordinatensystem.

b) **P'** hat im verschobenen Koordinatensystem die bisherigen Koordinaten **P'**(x | y). Der Ursprung lag vorher bei **U**(0 | 0), nach der Verschiebung liegt er bei **U'**(a | b). Bei dieser Sichtweise muss das verschobene Koordinatensystem immer noch dieselbe Skalierung (Länge der Einheitsvektoren und Winkel zwischen diesen) besitzen.

3b) Mit homogenen Koordinaten

Weil mit homogenen Koordinaten nur Multiplikationen vorkommen sollen, wird eine Matrix für die Verschiebung eingeführt.

Anstelle des vorigen Vektors **t** wird die Matrix **T** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{a} \\ 0 & 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ definiert.

Damit gilt für die Verschiebung **p'** = **T·p** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$

♦ Interessant ist, dass der Teil $\begin{pmatrix} 1 & 0 & . \\ 0 & 1 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$ an die Drehmatrix erinnert, und zwar an eine Drehung um den Winkel 0.

♦ Trivial ist, dass der Rechenaufwand deutlich größer ist als für die normale (inhomogene) Koordinatendarstellung. Das wurde schon am Anfang genannt!

4. Kombination Rotation - Rotation

4a) Mit normalen Koordinaten

$\mathbf{D_1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$; $\mathbf{D_2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$

Angewandt auf **p**: $\mathbf{D_2}\,\mathbf{D_1}\,\mathbf{p}$ {Zuerst Drehung $\mathbf{D_1}$ dann Drehung $\mathbf{D_2}$}

Anschaulich wird erwartet, dass das insgesamt einer Drehung $\mathbf{D_{12}}(\alpha + \beta)$ entspricht.

Explizit durchgerechnet:

$\mathbf{D_{12}} = \mathbf{D_2}\,\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & -\sin(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Mit den Additionstheorem

sin(α+β) = sin(α)cos(β) + cos(α)sin(β) und cos(α+β) = cos(α)cos(β) - sin(α)sin(β)

ist dies gleich $\mathbf{D_{12}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

Wie erwartet spielt bei direkt aufeinanderfolgenden Drehungen die Reihenfolge keine Rolle, es ist $\mathbf{D_{12}} = \mathbf{D_{21}}$.

4b) Mit homogenen Koordinaten

Mit äquivalenten Rechenschritten gilt auch für **D**(φ) = $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D(α) D(β) = D(α+β)

Da beide Matrizen dieselbe Struktur 3x3 haben, gilt auch **D(α) D(β)** = **D(β) D(α)**.

5. Kombination Translation - Translation

5a) Mit normalen Koordinaten

Direkt zu sehen ist **p** + $\mathbf{t_1}$ + $\mathbf{t_2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a+c \\ y+b+d \end{pmatrix}$$

Trivial ist, dass zusammengefasst werden kann. Mit **z** = $\mathbf{t_1}$ + $\mathbf{t_2}$ liefert **p** + **z** dasselbe Ergebnis.

5b) Mit homogenen Koordinaten

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{T_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erwarten nun, dass $\mathbf{T_1}$ $\mathbf{T_2}$ **p** (zuerst Verschiebung mit $\mathbf{T_2}$) und $\mathbf{T_2}$ $\mathbf{T_1}$ **p** beide das Resultat **p'** = $\begin{pmatrix} x+a+c \\ y+b+d \\ 1 \end{pmatrix}$ liefern.

Wir fassen zusammen: **Z** = $\mathbf{T_1}$ $\mathbf{T_2}$ (Wegen gleicher Struktur ist auch **Z** = $\mathbf{T_2}$ $\mathbf{T_1}$.)

Explizit: $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c+a \\ 0 & 1 & d+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Produkt $\mathbf{p'} = \mathbf{Z}\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c+a \\ 0 & 1 & d+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+c+a \\ y+d+b \\ 1 \end{pmatrix}$

♦ In beiden Varianten können die beiden Translationen in eine gemeinsame Translation zusammengefasst werden. Selbstverständlich ist dafür der Rechenweg mit homogenen Koordinaten ein sehr übertriebener Aufwand!

6. Kombination Rotation- Translation

Jetzt, bzw. erst jetzt, zeigt sich, dass homogene Koordinaten einen Vorteil bringen. Rotation und Translation können mit der gleichartigen Operation "Matrixmultiplikation" berechnet werden.

♦♦ Fall 1: Zuerst Rotation, dann Translation

6a) Mit normalen Koordinaten

$\mathbf{p'} = \mathbf{D}\,\mathbf{p}$: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$\mathbf{p''} = \mathbf{p'} + \mathbf{t}$: $\begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) + a \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) + b \end{pmatrix}$

6b) Mit homogenen Koordinaten

$\mathbf{p'} = \mathbf{D}\,\mathbf{p}$: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{p''} = \mathbf{T}\,\mathbf{p'} = \mathbf{T}\,\mathbf{D}\,\mathbf{p}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) + a \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) + b \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Rechenaufwand ist größer, aber es wurde dieselbe Operation "Matrixmultiplikation" zweimal durchgeführt.

♦♦ **Fall 2: Zuerst Translation, dann Rotation**

> **VORSICHT! Hier muss genau beachtet werden, was berechnet werden soll!**
> Die angegebenen Beziehungen beschreiben jeweils eine Rotation um den Koordinatenursprung. Wenn wir zuerst verschieben und dann eine Drehung im verschobenen System durchführen wollen, können wir nicht direkt die Matrix für die Drehung anwenden! Es ist dann ein "Umweg" erforderlich: Zuerst Verschiebung des Koordinatensystems in den Ursprung, dort Drehung und dann wieder Zurückverschiebung.

6c) Mit normalen Koordinaten

Ein Rechenweg **p'** = **p** + **t** und dann **p''** = **D p'** bedeutet, dass die zweite Drehung um den Ursprung erfolgt.

Für eine Verschiebung um **v** und dann eine Drehung um den verschobenen Ursprung muss im zweiten Schritt gerechnet werden:

1. Verschiebung von **p'** um **-t**,
2. Drehung um α,
3. Rückverschiebung um **+t**.

p = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; **p'** = **p** + **v** = $\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$; um **-t** verschoben = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

gedreht: $\begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix}$; um **+ t** verschoben = **p''** = $\begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) + a \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) + b \end{pmatrix}$

Dieses Ergebnis ist auch anschaulich einsichtig. Es ist gleichwertig, wenn zuerst um **U** gedreht wird und dann um **v** verschoben und wenn zuerst um **t** verschoben wird und dann um das verschobene **U'** gedreht wird. {In unserem Fall **U**(0 | 0) und **U'**(a | b)}

6d) Mit homogenen Koordinaten

Wenn zuerst verschoben und dann um den alten Ursprung gedreht wird, gilt analog zum Vorigen **p''** = **D T p**.

Wenn um den Ursprung des verschobenen Systems gedreht wird, folgt ebenso analog
p'' = { $\mathbf{T\,D\,T^{-1}}$ } **T p**

Ohne die Hilfsklammern ist das $\mathbf{T\,D\,T^{-1}\,T\,p}$.

Darin ist $\mathbf{T^{-1}\,T} = \mathbf{E}$ (Einheitsmatrix) und damit insgesamt **p''** = **T D p**.

{Das wurde schon in 6b) berechnet.}

♦!!! Eine mögliche Fehlerquelle ist die üblicherweise verwendete Sprache. Mit "Es wird zuerst verschoben und dann gedreht" meint man, dass die Drehung im verschobenen System erfolgt. Würde um einen anderen Punkt gedreht, gilt **p''** = $\mathbf{T_2\,D\,T_2^{-1}\,T_1\,p}$ und dann kürzen sich die **T**-Matrizen nicht mehr als Produkt **E**!

6e) Ergänzung

Als "optische Vereinfachung" benutzen wir C = cos(α) und S = sin(α).

Es ist **T** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und **D**(α) = $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

In 3b) wurde genannt, dass **T** teilweise an eine Drehung um 0° erinnert.

♦ Die Operation **T D** haben wir auch schon in 6b) behandelt.

Es ist **T D** = $\begin{pmatrix} C & -S & a \\ S & C & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wir sehen, dass die Teile Translation und Rotation geeignet "kombiniert" sind.

Wenn die Drehung um den verschobenen Ursprung erfolgen soll, hatten wir schon gesehen, dass korrekt { $\mathbf{T\,D\,T^{-1}}$ } **T** ≡ **T D** anzuwenden ist.

♦Für die Operation **D T** haben wir vorher genannt, dass dies eine Translation und danach eine Drehung um den Koordinatenursprung bedeutet.

Es ist **D T** = $\begin{pmatrix} C & -S & Ca - Sb \\ S & C & Sa + Cb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zur Erklärung wenden wir das auf **p** an.

p'' = **D T p** = $\begin{pmatrix} C & -S & Ca - Sb \\ S & C & Sa + Cb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx - Sy + Ca - Sb \\ Sx + Cy + Sa + Cb \\ 1 \end{pmatrix}$

Zum Vergleich schrittweise:

p' =**T p** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$; **p''** = **D p'** = $\begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx + Ca - Sy - Sb \\ Sy + Sa + Cy + Cb \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Inverse Matrizen T^{-1} und D^{-1}.

In der Anschauung bedeutet die Umkehrung einer Verschiebung um +**x** eine Verschiebung um -**x** und die Umkehrung einer Drehung um +α eine Drehung um -α.

Es gilt auch für die Matrizen: $\mathbf{T}^{-1}(+\mathbf{x}) = \mathbf{T}(-\mathbf{x})$ und $\mathbf{D}^{-1}(+\alpha) = \mathbf{D}(-\alpha)$.

{Dabei in "normalen" Koordinaten **x** = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und **- x** =$\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ }

Die manuell umständliche Berechnung einer inversen Matrix ist nicht nötig.

Schneller kann kontrolliert werden, dass $\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{T} = \mathbf{E}$ (Einheitsmatrix) und $\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{D} = \mathbf{E}$ gilt.

{Als Transformations-Operation entspricht **E** der Identität, die das Objekt nicht ändert, als Matrix der Einheitsmatrix.}

$$\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a - a \\ 0 & 1 & b - b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{D}(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit sin(-α) = - sin(α) und cos(-α) = cos(α):

$$\mathbf{D}(-\alpha)\,\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & +\sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$