Homogene Koordinaten - Anschaulich (2)

Bisher wurde ein Übergang von R^2 in R^3 durchgeführt. Für diesen Übergang wurden die Ausdrücke in R^2 geeignet mit "0" und "1" erweitert. Zusätzlich zum Standpunkt, "dann funktioniert es eben", ist eine geometrische Interpretation möglich.

(A) Wir beginnen mit der Rotation.

In R^2: $\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$; in R^3: $\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & \mathbf{0} \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Dazu betrachten wir einen Punkt **P** in R^2, der um α (im Gegenuhrzeigersinn) gedreht wird.

In R^3 betrachten wir eine Ebene, die parallel zur Ausgangsebene liegt. **P** wird auch in diese Ebene verschoben, **P'** hat dann dieselben x- und y-Koordinaten. Komplett in R^3 betrachtet ist:

Ausgangssituation: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$; verschoben um z $\mathbf{p'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$

Eine Drehung in der Ausgangsebene erfolgt um den Ursprung **O**: $\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Eine Drehung in der verschobenen Ebene erfolgt um **O'**: $\mathbf{o'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$

Eine Drehung in der x-, y-Ebene um **O** ändert die Lage von **O** nicht. Ebenso ändert eine Drehung in verschobenen x-, y-Ebene um **O'** (also eine Drehung um die z-Achse) **O'** nicht.

Rechnung in R^2: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Rechnung in R^3: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & \mathbf{0} \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$

Die Gleichheit der x-, y-Koordinaten gilt für alle (linearen) Transformationen, die in der in z-Richtung nach oben verschobenen x-, y-Ebene stattfinden.

R^2: $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}x + m_{12}y \\ m_{21}x + m_{22}y \end{pmatrix}$; R^3: $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \mathbf{0} \\ m_{21} & m_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}x + m_{12}y \\ m_{21}x + m_{22}y \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$.

Obwohl es unwichtig ist, sagen wir an dieser Stelle, dass wir z = 1 einsetzen, weil es "schöner aussieht".

Außer einer unnötigen ABM (=Arbeitsbeschaffungsmaßnahme) haben wird nichts erreicht! Auch im (bis jetzt noch erlaubten) Fall z =0 haben wir die Transformation in der Ausgangsebene nur kompliziert ausgedrückt.

(B) Jetzt betrachten wir eine **Translation** in x- bzw. in x- und y-Richtung.

Für **P**(x | y) erfolgt eine Translation, in R^2: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$

In R^3 machen wir dasselbe, **p'** = **p** + **t**: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$

{**t** hat die z-Koordinate "0", weil die Verschiebung in der x-, y-Ebene erfolgt. }

{In der Ausgangsebene ist z = 0.}

Eine alternative, äquivalente Betrachtung wäre die Verschiebung des Koordinatensystems.

In der verschobenen Ebene ist durch die Translation und Parallelverschiebung der Ursprung **O** zu **O'** geändert.

O $\to$ **O'**: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$

Weil in der parallel verschobenen Ebene **P** die gleichen x, y-Koordinaten bezüglich des neuen Ursprungs hat, gilt für die Koordinaten von **P'** (eventuell präziser, für die Vektoren von **O** zum Punkt **P'** in der verschobenen Ebene):

p' = $\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$

Nach gedanklichem Wegstreichen von "z" ist dies die gewünschte Translation.

Bisher auch wieder nur ABM!

(C) Nun kommt der entscheidende Gedanke! Lässt sich die **Translation** durch eine Multiplikation **Vektor · Matrix**, also eine lineare Operation, ersetzen?

Angegeben wird, **T** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{a} \\ 0 & 1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ kann dies erreichen.

Dann folgt **p'** = **T p**: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+az \\ y+bz \\ z \end{pmatrix}$

Das sind wieder die Koordinaten in der verschobenen Ebene.

Zur Vereinfachung wählen wir z = 1 und es folgt **p'** = $\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit ist das Ziel erreicht. Die Translation lässt sich im allgemeinen Formalismus mit Matrizen behandeln. Die Koordinaten in R^2 folgen jeweils, indem man die dritte z-Komponente weglässt.

Einsichtig ist, dass hier z = 0 nicht erlaubt ist,

T p: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit haben wir nicht mehr die gewünschte Translation.

(Wir werden sehen, dass wir Vektoren vom Ursprung **O** zu Punkten in der verschobenen Ebene betrachten und diese dann scheren. Diese Scherung ist nicht durchführbar, wenn die verschobene Ebene und die Ausgangsebene identisch sind.)

(D) Die zugrundeliegende **Idee** lässt sich auch **mit einfacher Geometrie verstehen**.

Wir wählen zuerst einen (vielleicht seltsam anmutenden) Fall von einer Translation nur in 1 "Koordinate".

{Damit leicht sich grafisch einfach das Prinzip und eine Begründung von "1" für die zusätzliche Koordinate erklären.}

Es ist 3 + 2 = 5. Nun machen wird daraus etwas in der x-, y- Ebene.

Parallel zur Ausgangsgeraden liegt die Gerade mit y = 1.

Wenn in der Ausgangsgeraden 3 + 2 = 5 gilt, erwarten wir parallel dazu:

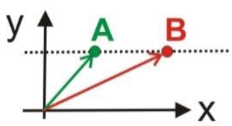
$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

{$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelten für die Zahlen 3 und 5, die nun auf der Geraden mit y = 1 liegen;

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt für eine Verschiebung um 2 in der x-Richtung, daher y-Koordinate = 0.}

Die entscheidende Frage ist damit, ob sich $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch als lineare Operation durchführen lässt. Dies ist in der Tat durch eine Scherung (mit 2 bezüglich der x-Koordinate) möglich!

Scherung: Verschiebung parallel zu einer Scherachse. Sei die x-Achse die Scherachse. Punkte auf der Scherachse ändern sich nicht. Punkte mit y ≠ 0 werden verschoben, z.B. aus **A** entsteht **B**. x ändert sich, y bleibt gleich!



Das kann als lineare Operation behandelt werden:

$$\begin{pmatrix}1 & \color{red}{2}\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+\color{red}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

Nach dem üblichen "Wegstreichen" des unteren "1" haben wird die Addition, wie gewünscht, in die Operation Matrix · Vektor umgesetzt.

> Eine direkte Verschiebung von 3 nach 5 auf der Zahlengeraden ist keine lineare Operation. Ebenso wäre eine direkte Verschiebung von **A** nach **B** in der oberen Geraden nur durch eine nichtlineare Translation möglich. ABER! Eine "Verschiebung" des Vektors von **O** nach **A** in einen Vektor von **O** nach **B** ist durch eine Scherung, als lineare Operation, möglich.

Wir sehen uns allgemeiner eine Translation um a in x-Richtung an.
{Scherachse ist immer noch die x-Achse.}

Mit y = 1: $\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+a\\1\end{pmatrix}$ {wie schon oben am Zahlenbeispiel gezeigt}

Für y ≠ 1 folgt: $\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+ay\\y\end{pmatrix}$

Das "Wegstreichen" des unteren y liefert das falsche Resultat x + y = x + ay.

Wir sehen aber schnell eine Lösung durch eine Änderung der Scherungs-Matrix:

$$\begin{pmatrix}1 & a/y\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+a\\y\end{pmatrix}$$

> Die Scherung ist also auch für beliebiges y definiert, aber die Wahl
> **y = 1 ist eine sinnvolle Vereinfachung des Rechenwegs.**

{Eine Alternative wäre: Auf der Geraden mit y = 1 wurde der Ausgangspunkt **A**(3 | 1) festgelegt und **B**(5 | 1) als Resultat erhalten. Wenn wir das als Scherung betrachten, können wir die Koordinaten, folgend aus den Ursprungsgeraden durch **A** und **B** angeben. Diese sind dann allgemein **A**(3y | y) und **B**(5y | y). Die Differenz der x-Koordinaten ist dann 2y. Bei "Wegstreichen" von y also eine falsche Translation. Verwendung von y = 1 beseitigt das Problem.}

__Zusatz:__ "Wie erwartet" ist auch die Wiederholung der Addition korrekt als Multiplikation von Matrizen beschrieben.

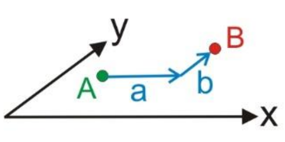
+ 2 + 4 = +6 und $\begin{pmatrix}1 & \mathbf{2}\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{4}\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\cdot 4+2\cdot 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{6}\\0 & 1\end{pmatrix}$

Nun realistischer die **Situation für $\mathbf{R^2}$**.

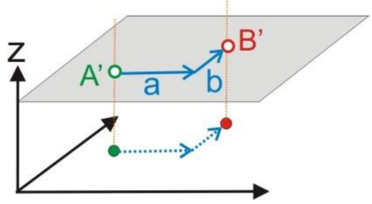
Für eine Transformation von Punkten in R^2 arbeiten wir in R^3 (den homogenen Koordinaten). Anstelle einer parallelen Geraden, wie in der obigen Skizze, arbeiten wir mit einer in der z-Achse verschobenen Ebene.

Dann wird räumlich die Gerade "vom Ursprung **O**(0 | 0 | 0) durch **P**(x | y | z)" geschert.

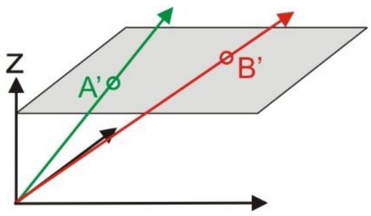
{Anstelle der Schergeraden haben wir jetzt die x-, y-Ebene als Scherebene.}



Ausgangsebene:
A wird mit **v** = $+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
nach **B** verschoben



Parallele Ebene z ≠ 0:
A' würde auch mit **v**
nach **B'** verschoben



Der Vektor $\overrightarrow{\mathbf{O\,A'}}$
kann durch eine **Scherung**
in den Vektor $\overrightarrow{\mathbf{O\,B'}}$
verschoben werden!

Die Parallelverschiebung von **A** und **B** nach **A'** und **B'** bringt noch keinen Vorteil. Auch die Translation **A'** → **B'** ist nur durch eine Addition beschreibbar. Vektoren vom Ursprung durch

| udie Punkte **A'** und **B'** lassen sich aber durch eine Scherung, als Multiplikation mit einer Matrix, ineinander überführen!

Wie oben schon angegeben: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{pmatrix}$

Zum gewünschten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$ kommen wir mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a/z \\ 0 & 1 & b/z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ z \end{pmatrix}$

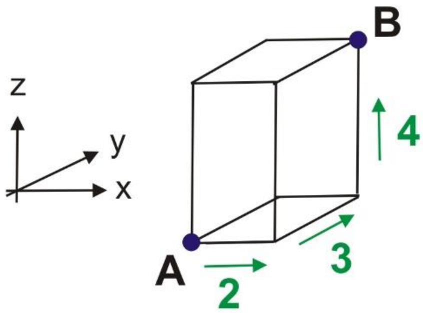
oder praktischer mit z = 1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$

{Die Wahl "1" ist nicht nötig, vereinfacht aber den Rechenaufwand.}

(E) Dass dieses Verfahren auch **in R^3** (und damit homogenen Koordinaten in R^4) funktioniert, können wir mit geometrischen Überlegungen nicht mehr erklären. Wir würden (als "Nicht-Mathematiker") testen, ob das Verfahren funktioniert.

(Leicht nachvollziehbares) Beispiel:

Gegeben ist ein Quader mit den Seitenlängen 2 (x), 3(y), 4(z).
Der Startpunkt **A** liegt bei **B**(1,2 | 1,4 | 1,6).
Einen Endpunkt **B**(3,2 | 4,4 | 5,6) erreichen wir durch (Translationen entlang der Achsen)



konventionell mit $\begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}4 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ 4{,}4 \\ 5{,}6 \end{pmatrix}$

Mit homogenen Koordinaten (und wieder "1" für die 4. Komponente) ist diese Translation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}4 \\ 1{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 + 2 \cdot 1 \\ 1{,}4 + 3 \cdot 1 \\ 1{,}6 + 4 \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ 4{,}4 \\ 5{,}6 \\ 1 \end{pmatrix}$$