## Verschiedene Bezugspunkte / Achsenorientierungen

Vereinbarung zur Nomenklatur: Bei mehrfachen Transformationen wird die übliche Leserichtung "von links nach rechts" benutzt.

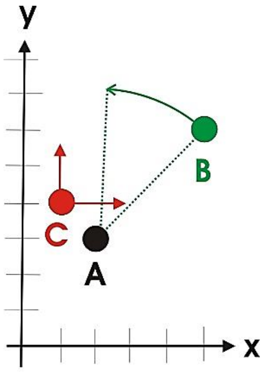
{Bei der Behandlung mit homogenen Koordinaten gilt für die Matrizen "von rechts nach links".}

{Im Folgenden sind Zahlenangaben jeweils gerundet}

### 1.) B wird um A als Drehpunkt gedreht

Gegeben sind 3 Punkte **A**, **B** und **C** mit den Koordinaten

**a** = $\binom{2}{3}$; **b** = $\binom{5}{6}$; **c** = $\binom{1}{4}$




Welche Koordinaten hat der um $\alpha = 40°$ gedrehte Punkt **B**

a) im Original-Koordinatensystem ("Weltkoordinaten"),

b) bezüglich **C**?

Diese verbale Formulierung kann auch so gesehen werden, dass ein Koordinatensystem mit **C** als Ursprung und gleicher Achsenorientierung und -skalierung wie im Originalsystem vorliegt.

**a)** Die Drehmatrix **D** = $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung, mit dem Winkel $\alpha$ im Gegenuhrzeigersinn.

Daher: Verschiebung **B** in den Ursprung → Drehung → Rückverschiebung

1. $\binom{5}{6} - \binom{2}{3} = \binom{3}{3}$
2. $\begin{pmatrix} 0{,}766 & -0{,}643 \\ 0{,}643 & 0{,}766 \end{pmatrix} \binom{3}{3} = \binom{0{,}370}{4{,}227}$
3. $\binom{0{,}370}{4{,}227} + \binom{2}{3} = \binom{\mathbf{2{,}370}}{\mathbf{7{,}227}}$

**b)** Lage relativ zu **C**? ⇒ Verschiebung so, dass **C** der Ursprung ist.

Anschaulich - eventuell trivial: Wenn ein Koordinatensystem um +x verschoben liegt, liegt der Punkt um -x verschoben im neuen System.

Mit dem obigen Punkt nach dem 3. Schritt:

$\binom{2{,}370}{7{,}227} - \binom{1}{4} = \binom{\mathbf{1{,}370}}{\mathbf{3{,}227}}$

### 2.) Zusammenhang zwischen gedrehten Koordinatensystemen

Das Beispiel zeigt, dass die übliche Vorgehensweise "Verschiebung in den Ursprung → Drehung → Rückverschiebung" nicht immer ausreichend ist. Es muss auch beachtet werden, was gedreht wird - ein Punkt oder ein Koordinatensystem!

**Es werden einige Möglichkeiten zu einer Herleitung gezeigt. Am Ende zeigt sich, dass eine ganz einfache geometrische Interpretation folgt!**

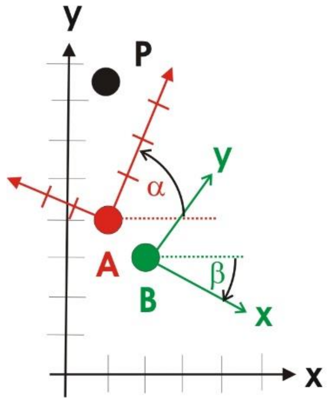
Punkte **A**, **B**; Koordinaten $\mathbf{a} = \binom{1}{4}$, $\mathbf{b} = \binom{2}{3}$.

Um **A** und um **B** liegen Koordinatensysteme mit gleicher Skalierung wie das übergeordnete Ausgangssystem, aber verschiedener Orientierung.
Ein Zusammenhang ist damit durch Translation und Rotation berechenbar.

Bezüglich des x-Achse des übergeordneten Ausgangssystems ist:
- ♦ "um **A**": gedreht um $\alpha = +60°$
- ♦ "um **B**": gedreht um $\beta = -40°$

Ein Punkt **P** hat <u>im</u> System "um **A**" die Koordinaten $\mathbf{p} = \binom{3}{2}$.

Welche Koordinaten hat **P** im System "um **B**"?




Die Koordinaten von **A** und **B** im übergeordneten System benötigen wir sicher, um den translatorischen Zusammenhang herzustellen. Ob die Koordinaten von **P** im übergeordneten System benötigt werden, ist noch unklar. Wichtig ist auch, dass wir keine Angaben für **P** im übergeordneten System berechnen sollen, sondern nur einen Zusammenhang zwischen den Systemen "um **A**" (Ausgang) und "um **B**"(Ziel) suchen. Der Punkt **P** bleibt unverändert an derselben Stelle bezüglich des übergeordneten Systems.

1. *Erste Idee*: Verschiebung von **A** in den Ursprung (um Drehungen durchführen zu können). Berechnung nötig: Nein!
   Wenn **A** in den Ursprung verschoben wird, hat **P** dieselben Koordinaten bezüglich des nun neuen Ursprungs, immer noch in einem gedrehten Koordinatensystem. Wir verschieben zwar gedanklich **A** in den Ursprung, aber die Koordinaten (relativ zu **A**) ändern sich nicht. {Ändern würden sich nur die Koordinaten bezüglich des übergeordneten Koordinatensystems.}
2. *Nun Drehung*: Wir drehen das System "um **A**" so, dass die x-Achse in die Richtung der x-Achse des übergeordneten Systems zeigt.
   Damit ist der Zusammenhang mit dem System **B** einfach zu behandeln. Die Verschiebung nach **B** und die zweite Rotation des Systems "um **B**" sind bekannt.
   **P** hat nun andere Koordinaten bezüglich des gedrehten Systems "um **A**". "Um **A**" war um $+\alpha$ gedreht, also muss um $-\alpha$ zurückgedreht werden. Der Punkt **P** muss dann wieder um $+\alpha$ gedreht werden.
   {Drehung Koordinatensystem und Drehung Punkt erfolgen mit entgegengesetztem Drehsinn.}
3. *Übergang zum System "um **B**"*: Wir verschieben so, dass **B** der neue Ursprung wird.
   Damit wird es dann möglich, auch die Drehung für "um **B**" zu berechnen.
   Ausgehend von **A** hat **B** den Abstand $\mathbf{t} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.
   Um den aktuellen Koordinaten Ursprung **A** nach **B** zu verschieben, muss also "neuer Ursprung ist $\mathbf{a} + \mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{a}$" gerechnet werden. Für den Punkt **P** gilt damit die entgegengesetzte Verschiebung $\mathbf{p} - \mathbf{t}$.
   **P** wird um $-\mathbf{t}$ verschoben.
4. *Drehung in die Orientierung von "um **B**":* Aktuell haben wir ein (lokales) Koordinatensystem mit **B** als Ursprung und einer Orientierung parallel zum übergeordneten System. Das tatsächliche System ist um $\beta$ gedreht. Die richtige Orientierung folgt damit aus einer Drehung des Systems um $+\beta$. Auf den Punkt **P** ist damit die Drehung $-\beta$ anzuwenden.
   Weil die Skalierung in allen Koordinatensystemen als gleich vorausgesetzt wurde, sind jetzt die Koordinaten von **P** die gesuchten Koordinaten im System "um **B**".

***Insgesamt***: Drehung um α → Translation um -(**b** - **a**) → Drehung um -β.

*Rechnung dazu*

Drehmatrix jeweils **D**(φ) = $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

α = +60°: **D**(α) **p** = $\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}866 \\ 0{,}866 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}232 \\ 3{,}598 \end{pmatrix}$

**t** = **b** - **a** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; **p'** = $\begin{pmatrix} -0{,}232 \\ 3{,}598 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}232 \\ 4{,}598 \end{pmatrix}$

β = -40°: **D**(-β) **p**' = $\begin{pmatrix} 0{,}766 & -0{,}643 \\ 0{,}643 & 0{,}766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1{,}232 \\ 4{,}598 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3,900} \\ \mathbf{2,730} \end{pmatrix}$

Eine Skizze bestätigt die Korrektheit.

**"Zum Vergleich" - Rechnung in homogenen Koordinaten**

> Selbstverständlich ist das für Fragestellung, Transformation nur eines Punktes, ein übertriebener Aufwand. Das Ergebnis ist dennoch interessant. Es weist auf eine andere Möglichkeit für die Arbeit mit den konventionellen Koordinaten hin. Es ist dies eine andere geometrische Interpretation, der Rechenaufwand bleibt aber praktisch gleich.

Mit der richtigen Reihenfolge gilt **D**(-β) **T**(-**t**) **D**(α) angewandt auf **p**.

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Durchführung liefert - nach weiteren (trigonometrischen) Zusammenfassungen:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) & t'_x \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) & t'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\begin{pmatrix} t'_x \\ t'_y \end{pmatrix}$ = **D**(-β) $\begin{pmatrix} -t_x \\ -t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t_x \\ -t_y \end{pmatrix}$

**Zurück:** Dies legt nun nahe, dass **in konventionellen Koordinaten** auch möglich ist:

1. Berechnen gedrehte Translation **T'** = **D**(-β) (**a- b**) ("Start - Ziel", **-t**)
2. **D**(α - β) und dann **T'** auf **p** anwenden.

*Rechnung dazu*

**a** - **b** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; β = -40°; **T'** = $\begin{pmatrix} 0{,}766 & -0{,}643 \\ 0{,}643 & 0{,}766 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}409 \\ 0{,}123 \end{pmatrix}$

**D**(α - β) **p** = **D**(60 -(-40)) **p** = $\begin{pmatrix} -0{,}174 & -0{,}985 \\ 0{,}985 & -0{,}174 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}491 \\ 2{,}607 \end{pmatrix}$

+ **T'**: $\begin{pmatrix} -2{,}491 \\ 2{,}607 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}409 \\ 0{,}123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3,900} \\ \mathbf{2,731} \end{pmatrix}$

*Anmerkung dazu*

Ein Vorwurf ist erlaubt. Wir haben das Verfahren in konventionellen Koordinaten so durchgeführt, weil es zum Ergebnis in homogenen Koordinaten geeignet erschien. Eine Verifikation für das Vorgehen wäre "zumindest nützlich".

Für die Schreibweise gilt stets, dass eine Aufeinanderfolge von Operationen gemeint ist, z. B. steht **D T** für eine Multiplikation mit einer Matrix und dann eine Addition von Vektoren.

Wir rechnen schrittweise **D**(α - β) **T'**. Vorher hatten wir **D**(α) **T D**(-β).
Der erste Teil ist einsichtig. Wenn wir **T D**(-β) durch **D**(-β) **T'** ersetzen können, gilt anfangs **D**(α) **D**(-β). Auch für eine Nacheinander-Ausführung ist dafür **D**(α - β) möglich.

Zu zeigen ist also, dass **T D** äquivalent **D T'** ist, und wie **T'** mit **T** zusammenhängt.
{"Erinnerung": In konventionellen Koordinaten bedeutet **T D** zuerst **T** dann **D**.}
{Für die Translation benutzen wir hier einfacher $\binom{a}{b}$.}

♦ **T D p**

**T** für einen Punkt **P**: $\binom{x}{y} + \binom{a}{b} = \binom{x+a}{y+b}$

**D(-β)** darauf angewandt:

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta)\,x + \cos(\beta)\,a + \sin(\beta)\,y + \sin(\beta)\,b \\ -\sin(\beta)\,x - \sin(\beta)\,a + \cos(\beta)\,y + \cos(\beta)\,a \end{pmatrix}$$

♦ **D T' p**

**D(-β)** für einen Punkt **P**: $\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \cos(\beta)\,x + \sin(\beta)\,y \\ -\sin(\beta)\,x + \cos(\beta)\,y \end{pmatrix}$

**T'** darauf angewandt: $\begin{pmatrix} \cos(\beta)\,x + \sin(\beta)\,y + t'_x \\ -\sin(\beta)\,x + \cos(\beta)\,y + t'_y \end{pmatrix}$

**T'** = $\begin{pmatrix} t'_x \\ t'_y \end{pmatrix}$ = **D**(-β) **t** = **D**(-β) $\binom{a}{b} = \begin{pmatrix} \cos(\beta)\,a + \sin(\beta)\,b \\ -\sin(\beta)\,a + \cos(\beta)\,a \end{pmatrix}$

{Die Äquivalenz ist (für die gesamte Transformation) verifiziert.}

## <u>Ende: Einfachere geometrische Interpretation der gesamten Transformation</u>

1. Der erste Schritt war eine Drehung **D**(α - β), angewandt auf den Punkt. Das bedeutet eine Drehung mit **D**(β - α) für das Koordinatensystem. Was berechnen wir? "Um **A**" ist (gegenüber dem übergeordneten System) um α gedreht, und "um **B**" ist um β gedreht. Wenn wir mit β - α um den Punkt **A** drehen, haben wir ein System, das mit dem Ursprung **A** gleichartig wie das System **B** gedreht ist.
2. Was fehlt als nächstes? Wir müssen den Ursprung von "um **B**", also **B**, nach **A** verschieben, dann haben wir die gesuchte Situation "um **B**" am neuen Ursprung **A**. Der unverändert gebliebene Punkt **P** hat dann im so erzeugten System genau die gesuchten Koordinaten.
Die Verschiebung **B** nach **A** kennen wir, aber im übergeordneten System, als **b** - **a**. Da wir im gleichen System arbeiten müssen, benötigen wir diese Verschiebung auch im gedrehten Koordinatensystem. Das System ist um **b** gedreht, also müssen wir den Vektor **b** - **a** um β drehen. Dann können wir addieren.
3. Oben haben wir die Rechnung, angewandt auf den Punkt **P**, formuliert.
Damit gilt (kontragredient): 1. Drehung **D(**α - β), 2. Translation um **D**(-β) (**a** - **b**).

<u>*Geometrisch*</u>:

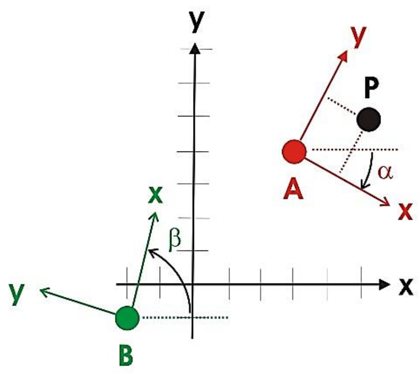
1. Drehe "um **A**" so, dass es die Orientierung von "um **B**" hat.
2. Verschiebe **B** so, dass es auf **A** liegt. Drücke die Verschiebung in der Orientierung nach dem 1. Schritt aus.

Als *Übung* ein weiteres Beispiel:

**a** = $\binom{3}{4}$, **b** = $\binom{-2}{-1}$

**p** = $\binom{2{,}5}{3{,}5}$ lokal in "um A"

α = -40°, β = +70°




Aus der Grafik erwarten wir für die Koordinaten von **P** im System "um **B**" eine positive x- und eine negative y-Koordinate,

*Lösung*: Koordinaten von **P** im System "um **B**": **p** = $\binom{8{,}84}{-6{,}53}$