Kegelschnitte - Teil 1

Vorbemerkung zur Schreibweise:
Punkte werden fett, groß **P** und dazugehörende Vektoren klein, fett **p** geschrieben.

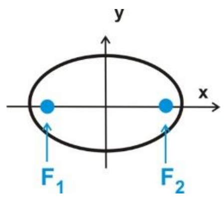
Üblicherweise wird eine Beschreibung in R^2 angegeben. Als Achsensystem wird meistens eine "Normallage" benutzt. Als spezielle Punkte werden die Scheitel und die Brennpunkte definiert. Zur Beschreibung von Abstands-Zusammenhängen kann auch eine Leitlinie definiert werden.

1.1

Eine **Ellipse** entsteht durch eine axiale Streckung aus einem Kreis.
In der "Normallage" ist der Mittelpunkt in einem (kartesischen) Achsensystem **M**(0 | 0).
Die große **Halbachse** (**a**) zeigt in Richtung x-Achse,
die kleine Halbachse (**b**) in Richtung y-Achse.

Es gilt die Koordinatengleichung el: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Symmetrisch zum Mittelpunkt auf der x-Achse liegen zwei **Brennpunkte** **F**: $\mathbf{F_1}(-e \mid 0)$, $\mathbf{F_2}(+e \mid 0)$.
Auf den Koordinatenachsen liegen die **Scheitel**.
Hauptscheitel $\mathbf{S_1}(\pm a \mid 0)$; Nebenscheitel $\mathbf{S_2}(0 \mid \pm b)$



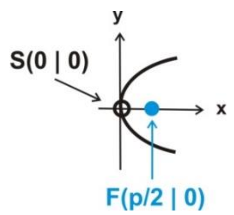
e wird so gewählt, dass damit Eigenschaften entstehen, die mit der Bezeichnung "Brennpunkt" angedeutet sind. e wird auch "lineare Exzentrizität" oder "Brennweite" genannt.

- **Brennpunkt-Eigenschaft:** Wenn die Innenseite der Ellipse verspiegelt ist, wird jeder von einem Brennpunkt ausgehende Strahl wieder auf den anderen Brennpunkt (durch Reflexion) fokussiert. (Englisch: Brennpunkt = "focus")
- Für jeden Punkt auf der Ellipse gilt, dass die Summe der Abstände von den beiden Brennpunkten 2a ist.

1.2

Die Punkte auf der **Parabel** liegen symmetrisch zur Mittellinie, der "Achse der Parabel". In der "Normallage" ist dies die x-Achse des Koordinatensystems. Der Graph ist ausgehend vom Scheitel im Koordinatenursprung nach rechts geöffnet. Zur Definition einer Koordinatengleichung dient der Brennpunkt.

Die Punkte auf der Parabel liegen symmetrisch zur Achse der Parabel.
F ist der Brennpunkt, **S** der Scheitel

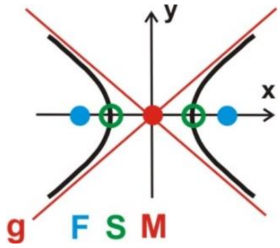


Es gilt: par: $y^2 = 2\,p\,x$

- **Brennpunkt-Eigenschaft:** Wenn die Innenseite der Parabel verspiegelt ist, wird jeder vom Brennpunkt ausgehende Strahl so reflektiert, dass er parallel zur Parabelachse weiterläuft (und umgekehrt).
- Zur Festlegung einer Abstandsbeziehung, die für jeden Punkt auf der Parabel gilt, muss zusätzlich die Leitlinie herangezogen werden. Es gilt dann, dass alle Punkte den gleichen Abstand vom Brennpunkt und von der Leitlinie haben. {Siehe Kapitel 5}

1.3

Eine **Hyperbel** enthält 2 Äste, symmetrisch zum Mittelpunkt. In der Normallage ist dies der Koordinatenursprung.



Mittelpunkt in einem (kartesischen) Achsensystem **M**(0 | 0).
Brennpunkte F_1(-e | 0) und F_2(e |0)
Scheitel S_1(-a | 0) und S_2(a | 0) auf der x-Achse.
Es gilt der Zusammenhang: $a^2 + b^2 = e^2$
g sind die Asymptoten

Es gilt die Koordinatengleichung hyp: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a bestimmt die Entfernung der Hyperbel vom Ursprung. (Sofort einsichtig aus den angegebenen Koordinaten der Scheitel)
Die Halbachsenlänge b bestimmt die Öffnung der Hyperbel. b kann, wie angegeben aus a und e errechnet werden. Geometrisch ist b die zur y-Achse parallele Strecke zwischen dem Scheitel und dem Schnittpunkt mit der Asymptote.

- **Brennpunkt-Eigenschaft:** Ein von einem Brennpunkt ausgehender Strahl wird so an der Hyperbel reflektiert, dass die Verlängerung des reflektierten Strahls durch den anderen Brennpunkt geht.
- Für jeden Punkt auf der Hyperbel gilt die Bedingung, dass die Differenz (Betrag) der Abstände zu den beiden Brennpunkten konstant ist.

1.4

Für jeden dieser Kegelschnitte kann durch Translation oder Rotation eine andere Lage bzw. Orientierung erzeugt werden. Zwei Anordnungen sind von "speziellem Interesse".

Wenn die **Parabel** um 90° gedreht wird, ist sie symmetrisch zur y-Achse. "Standardlage"
Es gilt dann **par:** $y = a\,x^2$.
Wenn in dieser Form die Parabel in Richtung x und y so verschoben wird, dass der Scheitel von **S**(0 | 0) nach **S**(x_o | y_o) geht, ist die allgemeine Form: **par:** $y = a\,(x - x_o)^2 + y_o$
Ausmultipliziert: $y = a\,x^2 - 2\,x\,x_o + x_o^2 + y_o$
Dies entspricht dem allgemeinen Ausdruck als Polynom 2. Grades f: $y = a\,x^2 + b\,x + c$

Wenn die **Hyperbel** um 45° gedreht wird, entsteht die "Standardlage". Darin liegen die Asymptoten in den Koordinatenachsen. Dann gilt: **hyp:** $y = const \cdot 1/x$
Wenn zusätzlich der Ursprung verschoben wird, liegen die Asymptoten parallel zu den Koordinaten Achsen und es gilt **hyp:** $y = const \cdot 1/(x - x_o) + y_o$.

Für eine beliebige Anordnung kann mit der "Hauptachsentransformation" untersucht werden, welche "einfache" Anordnung (Normalform) dem entspricht. {siehe Kapitel 9 und 10}