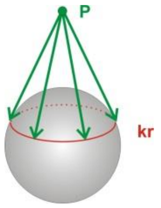
Kegelschnitte - Teil 2

2. Dandelinsche Kugeln

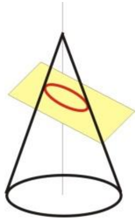
Durch Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel entstehen die verschiedenen Kegelschnitte. Interessant sind geometrische Bedingungen, wenn zusätzlich Kugeln innerhalb des Kreiskegels angeordnet werden. Dies wurde von Dandelin und Quetelet beschrieben.
(Die schrittweise Entwicklung der Skizzen soll das Verständnis erleichtern.)

Vorbemerkung:
Von einem Punkt **P** (Pol) können verschiedene Tangenten an eine Kugel gelegt werden, die alle gleich lang sind.
So entsteht ein Berührkreis kr.
(Dieser Berührkreis würde auch entstehen, wenn die Ebene, in der der Kreis liegt, mit der Kugel geschnitten wird.)

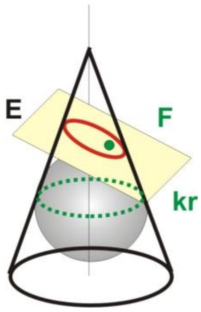


2.1 Ellipse:

Eine Ebene schneidet schräg einen Kreiskegel.
Die Schnittpunkte liegen in der Ebene und auf dem Kegelmantel;
d.h. alle Ellipsenpunkte liegen auch auf dem Kegelmantel!
(Anschaulich ist dies ein geneigter Berührkreis)

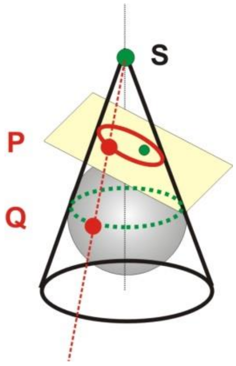


Erste Dandelin-Kugel
Innerhalb des Kreiskegels liegt eine Kugel.
Alle Punkte des Berührkreises liegen auf dem Kegelmantel.
Die Kugel liegt so, dass die Ebene E im Punkt **F** berührt wird.
(Es wird sich herausstellen, dass dies dann ein Brennpunkt F der Ellipse ist.)

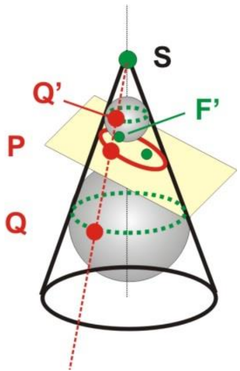


Wir betrachten nun 2 Punkte **P** und **Q**, auf einer Mantellinie durch den Scheitel **S**.
P liegt in der Ebene E und ist ein Punkt der Ellipse.
Q liegt auf dem Berührkreis.
Es ist $|\overrightarrow{\mathbf{PF}}| = |\overrightarrow{\mathbf{PQ}}|$.

(**P** liegt außerhalb der Dandelin-Kugel, **F** und **Q** auf dieser. Damit sind $\overrightarrow{\mathbf{PF}}$ und $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ zwei Tangenten von 1 Pol aus, und diese sind gleich lang!)



Zweite Dandelin-Kugel
Oberhalb der Ebene wird eine 2. Kugel angeordnet.
Alle Punkte des oberen Berührkreises liegen auf dem Kegelmantel. Die Kugel liegt so, dass die Ebene E im Punkt **F'** berührt wird.
Ein Punkt **Q'** liegt auf dem oberen Berührkreis auf der vorher gewählten Mantellinie durch **P**, **Q**, **S**.
Mit der identischen Überlegung wie für die untere Kugel gilt für die obere Kugel $|\overrightarrow{\mathbf{PF'}}| = |\overrightarrow{\mathbf{PQ'}}|$.

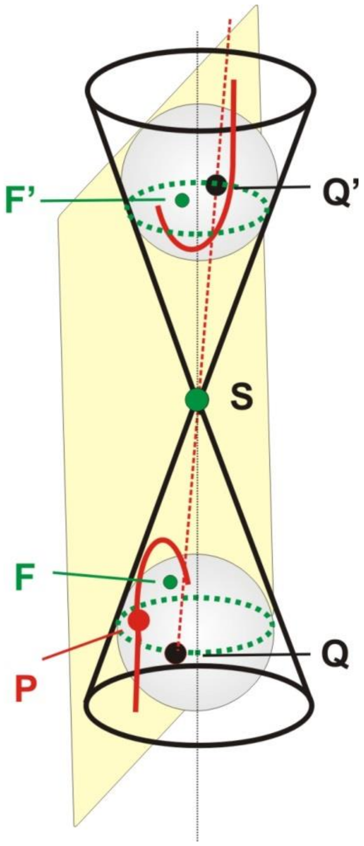


Ebenfalls aus der Geometrie der Anordnung ist erkennbar, dass $|\overrightarrow{PQ}| + |\overrightarrow{PQ'}| = |\overrightarrow{QQ'}|$ einen konstanten Wert für jedes **P** hat. (Weil **Q**, **P**, **Q'** auf 1 Mantellinie liegen, bleibt der Abstand gleich, wenn diese Linie im Kreis um die Achse des Kreiskegels gedreht wird.)

Weil $|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PQ}|$ und $|\overrightarrow{PF'}| = |\overrightarrow{PQ'}|$ gilt damit $|\overrightarrow{PF}| + |\overrightarrow{PF'}| = \text{const.}$

Das ist die geometrische Bedingung, die für jeden Punkt der Ellipse gelten muss:
"Die Summe der Abstände eines Punkts **P** der Ellipse von 2 Punkten **F** und **F'** ist konstant".
Wie vorher gezeigt, genügt diese Bedingung zur Herleitung aller weiteren Gleichungen; **F** und **F'** werden dann auch als Brennpunkte präzisiert.

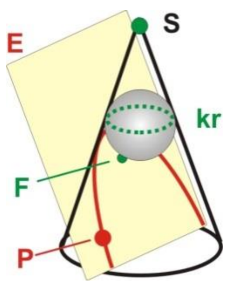
2.2 Für die **Hyperbel** ist die Skizze mit der Erklärung (hoffentlich) verständlich. Die Argumentation ist (leider) etwas umständlicher als bei der Ellipse.
Eine Ebene schneidet einen Kreisdoppelkegel parallel zur Hauptachse. Zwei Dandelin-Kugeln werden eingefügt.
Die Kugeln berühren die Schnittebene in den Punkten **F** und **F'**; die Kugeln berühren den Kegelmantel jeweils in einem Berührkreis.
P sei ein Punkt auf dem unteren Hyperbelast, **Q** sei ein Punkt auf dem unteren Berührkreis. **Q** liegt so, dass es von **P** aus mit einer Tangente an die Kugel erreicht wird.
P liegt nicht auf der Kugel, **F** und **Q** liegen auf der Kugel.
$\overrightarrow{PF}$ und $\overrightarrow{PQ}$ sind damit zwei Tangenten von 1 Pol aus und daher gleich lang, $|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PQ}|$.
Q' liegt auf dem oberen Berührkreis so, dass **Q**-**S**-**Q'** auf einer Linie liegen. $\overrightarrow{QQ'}$ liegt also auf einer Mantellinie, die Länge bleibt bei einer Drehung gleich.
$\overrightarrow{PF'}$ und $\overrightarrow{PQ'}$ sind auch zwei Tangenten von 1 Pol (**P**) aus, also gleich lang.
Wenn ein anderer Punkt **P** auf dem unteren Hyperbelast betrachtet wird, führt die Tangente zu einem anderen **Q** (und dem zugeordneten **Q'** und gleich langem $\overrightarrow{QQ'}$).



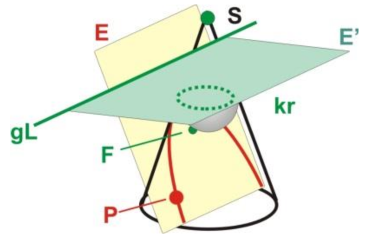
Für die Abstände von **P** aus gilt: $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'}$
$|\overrightarrow{QQ'}|$ ist konstant für jedes **P**, damit $|\overrightarrow{PQ'}| - |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PF'}| - |\overrightarrow{PF}| = \text{const.}$

Das ist die geometrische Bedingung, die für jeden Punkt der Hyperbel gelten muss:
"Die Differenz der Abstände eines Punkts **P** der Hyperbel von 2 Punkten **F** und **F'** ist konstant". (**F** und **F'** werden dann als Brennpunkte präzisiert.)

2.3 Bei der **Parabel** liegt ein Schnitt parallel zu einer Mantellinie vor. Die Parabel liegt in der Schnittebene E. **P** ist ein Punkt der Parabel. (**P** liegt auch auf dem Kegelmantel.)
Die Dandelin-Kugel berührt E im Punkt **F**. kr ist der Berührungskreis der Kugel mit der Mantelfläche des Kegels.



Ein zweite Ebene E' wird durch den Schnittkreis kr gelegt. (Sie ist parallel zum Grundkreis des Kreiskegels bzw. senkrecht zur Kegelachse.) E' schneidet E in der Schnittgeraden gL. (Dies wird später als die Leitlinie identifiziert.)



Ergänzungen

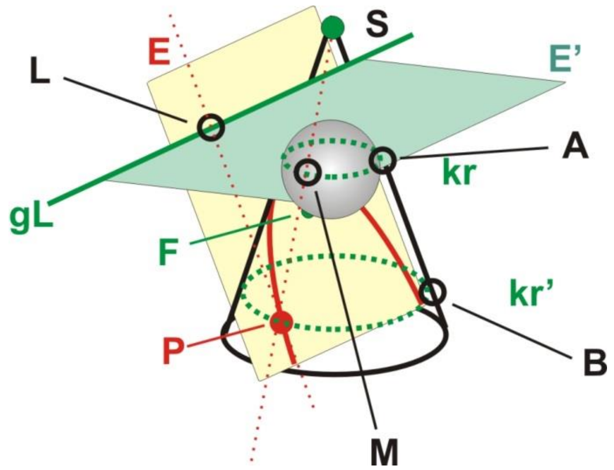
kr' Berührkreis (mit dem Kegelmantel) durch den Punkt **P**.

L auf der Geraden gL, von **P** aus nach oben

M auf dem Berührkreis kr so, dass **P**-**M**-**S** auf einer Mantellinie sind

A auf dem Berührkreis kr

B auf dem Berührkreis kr'



Es gelten nun Bedingungen für gleiche Abstände

$|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PM}|$ 2 Tangenten von 1 Pol **P** an die Dandelin-Kugel

$|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{AB}|$ Beides sind Mantellinien, und kr und kr' sind parallel

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{PL}|$ E liegt parallel zur Mantellinie **S**-**A**-**B**, **A** und **L** liegen auf gleicher Kegelhöhe, ebenso liegen **P** und **B** auf gleicher Kegelhöhe.

$\overrightarrow{PL}$ ist senkrecht zu gL, $|\overrightarrow{PL}|$ ist damit der (Lot-) Abstand des Punkts **P** von der Geraden gL.

Bei Wahl eines anderen Punkts **P** ändern sich die Orte der einzelnen Punkte, aber die relativen Abstandsbeziehungen bleiben gleich.

Insgesamt folgt = $|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PL}|$

Das ist die geometrische Bedingung, die für jeden Punkt der Parabel gelten muss:

"Der Abstand eines Punkts **P** der Parabel von einem Brennpunkt **F** und einer Leitlinie gL ist gleich."

(Dieser Abstand ist nicht insgesamt konstant, also für alle Punkte gleich, aber für jeden einzelnen Punkt gilt die geforderte Gleichheit.)