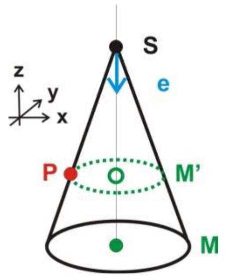
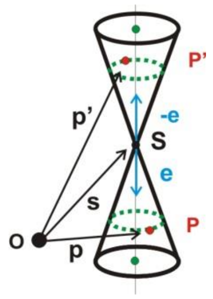
Kegelschnitte - Teil 3

3. Kreiskegel und Kegelschnitt

3.1 Kreiskegel



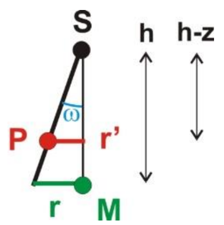
Allgemein (beliebiges Koordinatensystem) kann ein Kreiskegel über den Öffnungswinkel ω definiert werden.
e sei ein Einheitsvektor in Richtung der Kegelachse
(in der Skizze Richtung $\overrightarrow{\mathbf{SM}}$)
P sei ein Punkt auf dem Kegelmantel; $\overrightarrow{\mathbf{SP}} = \mathbf{p} - \mathbf{s}$
Dann: $(\mathbf{p} - \mathbf{s})\cdot\mathbf{e} = |\mathbf{p} - \mathbf{s}| \cos(\omega)$
M und **M'** sind jeweils die Punkte in der Mitte der Kreise!



Ein symmetrischer Doppelkegel ist gleichartig beschreibbar.
Von einem (beliebigen) Ursprung **O** aus führt **p** zu einem Punkt auf der unteren Mantelfläche, **p'** zu einem Punkt auf der oberen Mantelfläche und **s** zur Spitze des Doppelkegels.
e ist ein Einheitsvektor im unteren und **-e** ein Einheitsvektor im oberen Teil.
Es gilt $(\mathbf{p} - \mathbf{s})\cdot\mathbf{e} = |\mathbf{p} - \mathbf{s}| \cos(\omega)$ und $(\mathbf{p'} - \mathbf{s})\cdot(-\mathbf{e}) = |\mathbf{p'} - \mathbf{s}| \cos(\omega)$

Wenn man die Unterscheidung unterer/oberer Kegel weglässt und **p** zu irgendeinem Punkt auf dem Kegelmantel führt, und die Unterscheidung durch das Vorzeichen eliminiert, folgt nach Quadrieren: $[(\mathbf{p} - \mathbf{s})\cdot\mathbf{e}]^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{s})^2 \cos^2(\omega)$
{Gilt für den Einfach- und den Doppelkegel}

Umständlicher ist die **explizite Festlegung von Punktkoordinaten**.
Beispiel für das Achsensystem der Skizze des Einfachkegels.
M(0 | 0 | 0); **S**(0 | 0 | h); **M'**(0 | 0 | z)
P in der Skizze auf der Mantellinie links: **P**(x | 0 | z)
Der Grundkreis um **M** kann (nur) in einer Parameterdarstellung angegeben werden:
kr: $\mathbf{x} = \mathbf{m} + r\cos(t)\,\mathbf{b_1} + r\sin(t)\,\mathbf{b_2};\ 0 \le t \le 2\pi$
Für $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{b_2}$ werden am einfachsten zwei orthonormierte Vektoren benutzt.
{Bedingung sind nur zwei linear unabhängige Vektoren, aber die Orthogonalität erleichtert weitere Rechnungen, vor allem das Skalarprodukt.}



r ist der Radius des Grundkreises um **M**
Für den Kreis um **M'** (parallel zum Grundkreis, durch **P**) kann der Radius r' über den Strahlensatz oder
über $\tan(\omega) = r / h = r' / (h - z)$ angegeben werden.
$r' = (r / h)(h - z)$

Damit sind alle möglichen Punkte **x** auf der Höhe z
(kr:) $\mathbf{x} = \mathbf{m'} + r'\cos(t)\,\mathbf{b_1} + r'\sin(t)\,\mathbf{b_2};\ 0 \le t \le 2\pi$
Mit $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}r'\cos(t)\\r'\sin(t)\\z\end{pmatrix};\ 0 \le t \le 2\pi;\ 0 \le z \le h$
Alle möglichen Punkte des Kreiskegels (Radius r, Höhe h) enthalten damit **2** Parameter!

Zahlenbeispiel
Kegel mit r = 2, h = 5; **P** auf der Höhe 3, Winkel $\pi/3$ (60°)
Öffnungswinkel $\tan(\omega) = r / h = 2/5$; $\omega \approx 21{,}80°$
$r' = (2/5)(5-3) = 4/5$; $\cos(60°) = 1/2$; $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$
$\mathbf{p} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2\sqrt{3}/5 \\ 3 \end{pmatrix}$
Dieses **p** erfüllt auch die allgemeine Gleichung $[(\mathbf{p} - \mathbf{s})\cdot\mathbf{e}]^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{s})^2 \cos^2(\omega)$:
$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; $(\mathbf{p} - \mathbf{s})\cdot\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2\sqrt{3}/5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$; $(\mathbf{p} - \mathbf{s})^2 = 4/25 + 12/25 + 4 = 116/25$
$\cos(\omega) = 1 / \{1 + \tan^2(\omega)\}^{1/2} \rightarrow \cos^2(\omega) = 1 / (1 + 4/25) = 25/29$
$2^2 = 116/25 \cdot 25/29 = 4$ ☑

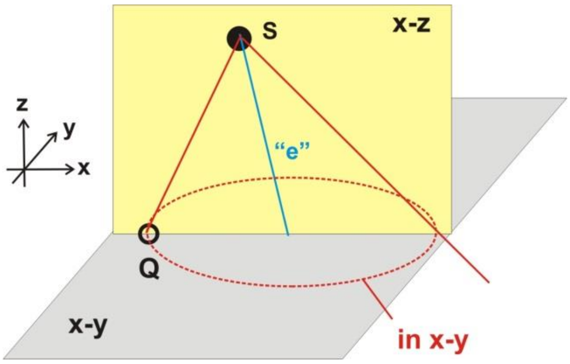
3.2 Schnitt Kegel / Ebene

Zweckmäßig ist, sich vorher zu überlegen, welches Endergebnis angestrebt ist. Wir starten mit Angaben in R^3, wollen aber am Ende eine Schnittfigur in R^2.

a) Ebene in der x-y-Ebene des Koordinatensystems.

b) Der Kegel sei so geneigt, dass die Kegelachse in der x-z-Ebene liegt.

c) Der Ursprung des Koordinatensystems ist der am weitesten links liegende Schnittpunkt **Q** des Kegels mit der Ebene, wenn der Kegel auch nach links geneigt ist.



a) Der Kegel ist dann geneigt. Dies führt aber bei der Anwendung der allgemeinen Formel zu keinen Schwierigkeiten.
b) Die Projektion der Kegelachse auf die Ebene ist dann kollinear zur x-Achse. Der Kegel ist symmetrisch zur x-z-Ebene. Der Kegelschnitt ist symmetrisch zur x-Achse.
c) **Q** und der Kegelscheitel **S** liegen in der x-z-Ebene. Allgemein liegt **Q** so, dass der kürzeste Abschnitt der Schnittpunkte mit der Ebene vorliegt.
⇒ Für die Schnittlinie in der x-y-Ebene entspricht damit **Q** dem Scheitel, wir berechnen die "Scheitelform".
Damit ist definiert
P(x | y | 0)   Der allgemeine Punkt der Schnittlinie liegt (irgendwo) in der x-y-Ebene.
S(s_x | 0 | s_z)   Der Kegelscheitel liegt (irgendwo) in der x-z-Ebene.
Die Kegelachse liegt in der x-z-Ebene, sie schneidet also (irgendwo) die Ebene auf der x-Achse. **e** geht von **S** in Richtung zu diesem Schnittpunkt.
$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ 0 \\ e_z \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1$
In diesem Koordinatensystem kann $\mathbf{s}\cdot\mathbf{e}$ vereinfacht werden:
Weil **Q**(0 | 0 | 0), ist $\overrightarrow{QS} = \mathbf{s} - \mathbf{q}$ gleich **s**. **-s** und **e** schließen den Winkel ω ein, **s** und **e** also den Winkel $180° - \omega$. Damit ist $\mathbf{s}\cdot\mathbf{e} = |\,\mathbf{s}\,| \cos(180° - \omega) = -|\,\mathbf{s}\,| \cos(\omega)$.
{Alternativ: Direkt einsetzen in $(\mathbf{q} - \mathbf{s})\cdot\mathbf{e} = -\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{e} = |\mathbf{q} - \mathbf{s}| \cos(\omega) = |-\mathbf{s}\,| \cos(\omega)$.}

Das "Schnittproblem" ist damit über Vereinbarungen zum Koordinatensystem berücksichtigt.
{Die weitere Bearbeitung enthält noch unbekannte Größen, s_x ...! Durch "Umbenennungen" kann aber schließlich eine Endformel erreicht werden, die der gewohnten Scheitelform entspricht.}

Mit der Abkürzung $c = \cos(\omega)$ ist die allgemeine Formel (Doppelkegel):

$[(\mathbf{p} - \mathbf{s})\cdot\mathbf{e}]^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{s})^2\, c^2$

$(\mathbf{p}\cdot\mathbf{e} - \mathbf{s}\cdot\mathbf{e})^2 = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{e})^2 - 2\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}\; \mathbf{s}\cdot\mathbf{e} + (\mathbf{s}\cdot\mathbf{e})^2 = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})\, c^2 - 2\, (\mathbf{p}\cdot\mathbf{s})\, c^2 + (\mathbf{s}\cdot\mathbf{s})\, c^2$

Mit dem obigen $\mathbf{s}\cdot\mathbf{e} = -|\,\mathbf{s}\,|\, c$ kürzen sich $(\mathbf{s}\cdot\mathbf{e})^2$ und $(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s})\, c^2$

In Koordinaten sind: $\mathbf{p}\cdot\mathbf{e} = x\, e_x$; $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = x^2 + y^2$; $\mathbf{p}\cdot\mathbf{s} = x\, s_x$

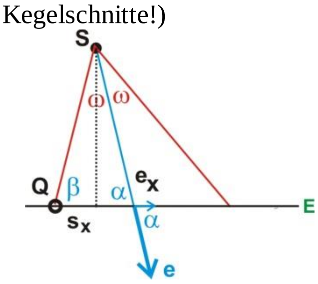
Damit: $x^2\, e_x^2 - 2\, c\, x\, e_x\, |\, s\, | = c^2\, (x^2 + y^2) - 2\, c^2\, x\, s_x$

geordnet: $c^2\, y^2 = x^2\, e_x^2 + 2\, c\, x\, e_x\, |\, s\, | + 2\, c^2\, x\, s_x - c^2\, x^2$

aufgelöst: $y^2 = 2\, x\, \{|\, s\, |\, e_x + s_x\, c\} / c + x^2\, \{e_x^2 - c^2\} / c^2$

Abkürzungen: $\{|\, s\, |\, e_x + s_x\, c\} / c = p$ und $\{e_x^2 - c^2\} / c^2 = \varepsilon^2 - 1$

Damit: $\mathbf{y^2 = 2\, p\, x + (\varepsilon^2 - 1)\, x^2}$ (Das ist die allgemeine Scheitelgleichung der Kegelschnitte!)



ε und p können auch geometrisch interpretiert werden:

e (Einheitsvektor) hat einen Winkel α relativ zur Ebene,
damit $e_x = \cos(\alpha)$

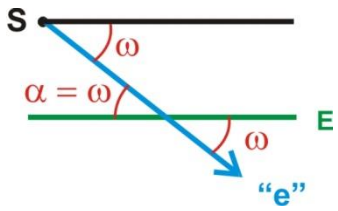
s (= $\overrightarrow{\mathbf{QS}}$) hat einen Winkel β relativ zur Ebene,
damit $s_x = |\,\mathbf{s}\,| \cos(\beta)$

$\varepsilon = e_x / c = \cos(\alpha) / \cos(\omega)$ wird "numerische Exzentrizität genannt"

$\{$Damit $(e_x^2 - c^2) / c^2 = e_x^2 / c^2 - 1 = \varepsilon^2 - 1\}$

$p = (|\, s\, |\, e_x + s_x\, c) / c = \varepsilon\, |\,\mathbf{s}\,| + |\, s\, | \cos(\beta) = |\,\mathbf{s}\,|\, \{\varepsilon + \cos(\beta)\}$

Neigungs- und Öffnungswinkel des Kegels bestimmen die Art des Kegelschnitts.



Beispiel: Der Öffnungswinkel des Kegels ist ω.
Die Kegelachse (in Richtung **e**) habe einen Winkel $\alpha = \omega$ relativ zur Ebene.

$\Rightarrow$ Die Ebene liegt parallel zu einer Mantellinie des Kegels.

$\Rightarrow \varepsilon^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ eine Parabel.