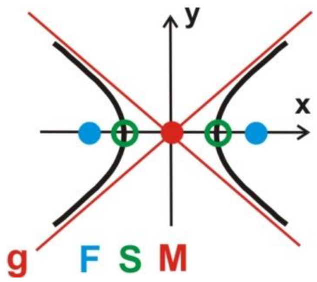
Kegelschnitte - Teil 6

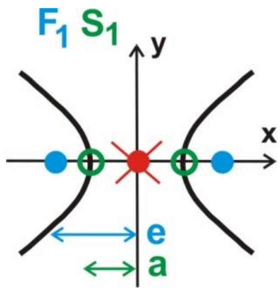
6. Details: Hyperbel

6.1 Koordinatengleichung in "Normallage"

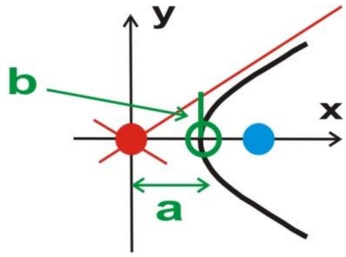
In der "Normallage" ist der Mittelpunkt in einem (kartesischen) Achsensystem **M**(0 | 0).
Die **Brennpunkte** $\mathbf{F_1}$(-e | 0) und $\mathbf{F_2}$(e |0) und die beiden **Scheitel** $\mathbf{S_1}$(-a | 0) und $\mathbf{S_2}$(a | 0) liegen auf der x-Achse.
Die Hyperbel schmiegt sich für große x (Betrag) an die **Asymptoten** an. Dies sind Ursprungsgeraden
g_1: y = +(b/a) x und g_2: y = -(b/a) x
Es gilt: $a^2 + b^2 = e^2$



Für jeden Punkt auf der Hyperbel gilt die Bedingung, dass die Differenz (Betrag) der Abstände zu den beiden Brennpunkten konstant ist. Der Wert der Konstanten ist für eine spezielle Wahl, **P** = $\mathbf{S_1}$, direkt ablesbar:
$\mathbf{S_1}$ hat den Abstand e - a von $\mathbf{F_1}$ und den Abstand e + a von $\mathbf{F_2}$.
Damit ist: $\left| |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| \right| = 2\,a$



Zusätzlich zur Halbachse a wird eine **Nebenachse** b eingeführt.
b ist parallel zur y-Achse und geht vom Scheitel **S** zum Schnittpunkt mit der Asymptote.
Damit hat die Asymptote die Steigung (b/a). (wie angegebenen)
a bestimmt die Entfernung der Hyperbel vom Ursprung,
b bestimmt deren Stauchung.
(symmetrische Situation auf der anderen Seite)



Damit entsteht die **Koordinatengleichung** $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

Formale Übungen:

- ♦ (1) Zu zeigen ist, dass diese Koordinatengleichung die Bedingung "Differenz der Abstände zu den Brennpunkten = 2a" erfüllt.
- ♦ (2) Alternativ kann aus der Bedingung diese Koordinatengleichung hergeleitet werden.

♦ (1) Für den speziellen Punkt $\mathbf{S_1}$ wurde geometrisch gezeigt: $\left| |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| \right| = 2\,a$
Gilt das auch allgemein? **P**(x_o | y_o); $\mathbf{F_1}$(-e | 0); $\mathbf{F_2}$(e | 0)
$d_1 = \overline{PF_1}$; $d_2 = \overline{PF_2}$; $d_1^2 = (x_o - (-e))^2 + (y_o - 0)^2$; $d_2^2 = (x_o - e)^2 + y_o^2$

d_1^2:
Eliminieren y_o: $d_1^2 = x_o^2 + 2\,e\,x_o + e^2 + y_o^2 = x_o^2 + 2\,e\,x_o + e^2 + x_o^2\,b^2 / a^2 - b^2$
Eliminieren b: $d_1^2 = x_o^2 + 2\,e\,x_o + e^2 + x_o^2\,(e^2 - a^2) / a^2 - (e^2 - a^2)$
$= x_o^2 + 2\,e\,x_o + e^2 + x_o^2\,e^2 / a^2 - x_o^2 - e^2 + a^2$
$= a^2 + 2\,e\,x_o + x_o^2\,e^2 / a^2 = (a + x_o\,e / a)^2$

d_2^2:
Eliminieren y_o: $d_2^2 = x_o^2 - 2\,e\,x_o + e^2 + y_o^2 = x_o^2 - 2\,e\,x_o + e^2 + x_o^2\,b^2 / a^2 - b^2$
Eliminieren b: $d_2^2 = x_o^2 - 2\,e\,x_o + e^2 + x_o^2\,(e^2 - a^2) / a^2 - (e^2 - a^2)$
$= x_o^2 - 2\,e\,x_o + e^2 + x_o^2\,e^2 / a^2 - x_o^2 - e^2 + a^2$
$= a^2 - 2\,e\,x_o + x_o^2\,e^2 / a^2 = (a - x_o\,e / a)^2$

Wegen $\sqrt{z^2} = \pm z$ ist allgemein eine kurze Überlegung (Fallunterscheidung) nötig.

Bei Zahlenwerten allein besteht kein Problem! a = 4; b = 3; e = 5.

$x_o = +4$: $d1^2 = 81$; $d_2^2 = 1$; $\left||\overline{\mathbf{PF_1}}| - |\overline{\mathbf{PF_2}}|\right| = | | \pm 9 | - | \pm 1 | | = 8 = 2a$

$x_o = -4$: $d1^2 = 1$; $d_2^2 = 81$; $\left||\overline{\mathbf{PF_1}}| - |\overline{\mathbf{PF_2}}|\right| = | | \pm 1 | - | \pm 9 | | = 8 = 2a$

Es gilt e > a.

1. x_o sei positiv, dann liegen alle $x_o \geq a$ auf dem rechten Hyperbelast.
   Sei $x_o = +a$. (kleinstmögliche Koordinate rechts)
   Dann: $d_1^2 = (a + e)^2$; $d_1 = | \pm (a + e) | = (a + e)$
   $d_2^2 = (a - e)^2$; $d_2 = | \pm (a - e) |$
   $\rightarrow$ weil e > a, ist $d_2 = -(a - e) = (e - a)$ positiv (Forderung für Betrag)
   Damit: $\left||\overline{\mathbf{PF_1}}| - |\overline{\mathbf{PF_2}}|\right| = | a + e - e + a | = | 2a | = 2a$.
2. x_o sei negativ, dann liegen alle $x_o \leq -a$ auf dem linken Hyperbelast.
   Sei $x_o = -a$. (größtmögliche Koordinate links)
   Dann: $d_1^2 = (a - e)^2$ und $d_2^2 = (a + e)^2$
   $|\overline{\mathbf{PF_1}}| = (e - a)$ und $|\overline{\mathbf{PF_2}}| = (a + e)$
   Damit: $\left||\overline{\mathbf{PF_1}}| - |\overline{\mathbf{PF_2}}|\right| = | e - a - a - e | = | -2a | = 2a$. ☑

♦ (2) Wie vorher ist $d_1^2 = x_o^2 + 2 e x_o + e^2 + y_o^2$ und $d_2^2 = x_o^2 - 2 e x_o + e^2 + y_o^2$.
Je nach der Lage von x_o ist $(d_1 - d_2) = \pm 2a$ möglich.
{Voraussetzung ist jetzt die Bedingung $| d_1 - d_2 | = 2a$; y_o kann nicht eliminiert werden, weil die Koordinatengleichung der Hyperbel hergeleitet werden soll.}

Ansatz: $d_1 = d_2 \pm 2a$

Quadriert:

$x_o^2 + 2 e x_o + e^2 + y_o^2 = x_o^2 - 2 e x_o + e^2 + y_o^2 + 4a^2 \pm 4a \{ x_o^2 - 2 e x_o + e^2 + y_o^2 \}^{1/2}$

$4 e x_o - 4a^2 = \pm 4a \{ x_o^2 - 2 e x_o + e^2 + y_o^2 \}^{1/2}$

Gekürzt und quadriert:

$e^2 x_o^2 - 2 e x_o a^2 + a^4 = a^2 x_o^2 - 2 e x_o a^2 + e^2 a^2 + a^2 y_o^2$

$e^2 = a^2 + b^2$ eingesetzt:

$a^2 x_o^2 + b^2 x_o^2 = a^2 x_o^2 + a^4 + a^2 b^2 + a^2 y_o^2 - a^4$

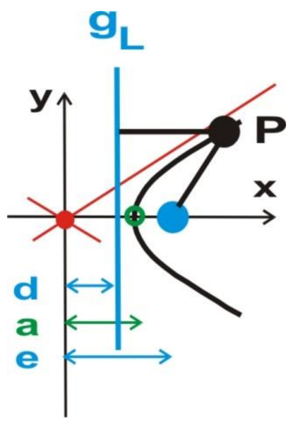
$b^2 x_o^2 - a^2 y_o^2 = a^2 b^2$

$\rightarrow x_o^2 / a^2 - y_o^2 / b^2 = 1$ und das gilt für jeden Punkt **P**(x | y) auf der Hyperbel. ☑

6.2 Scheitel und Leitlinie

Scheitel: Die beiden Scheitel $\mathbf{S_1}$ und $\mathbf{S_2}$ liegen auf der x-Achse und sind Punkte der Hyperbel. Man kann auch zwei Nebenscheitel $\mathbf{S'_{1,2}}(0 | \pm b)$ definieren. Diese sind dann nicht Punkte der Hyperbel.

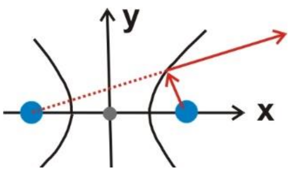
Es gibt zwei **Leitlinien**, symmetrisch zu **M**. Das sind Geraden symmetrisch zur y-Achse, g_L: $x = \pm d$; $d = a^2 / e$.
Für jeden Punkt der Hyberbel ist der Quotient "Abstand zu einem Brennpunkt / Abstand zur Leitlinie (in der gleichen Halbebene wie der Brennpunkt)" konstant.
$|\overline{\mathbf{PF_1}}| / |\overline{\mathbf{Pg_{L1}}}| = e / a$.
(symmetrische Situation auf der anderen Seite)



{Weil e > a ist der Abstand zum Brennpunkt größer als der Abstand zur Leitlinie. Vergleich: Bei der Ellipse ist umgekehrt der Abstand zur Leitlinie größer, bei der Parabel sind beide Abstände gleich.}

6.3 Brennpunkt

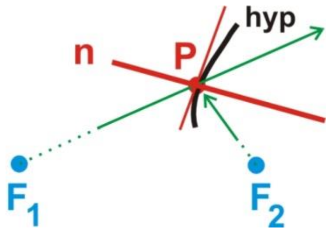
Eigenschaft der **Brennpunkte** bezüglich der **Reflexion**:
Ein von einem Brennpunkt ausgehender Strahl wird so an der Hyperbel reflektiert, dass die Verlängerung des reflektierten Strahls durch den anderen Brennpunkt geht.



{Wenn wir nicht die Richtung des Strahls betrachten, sondern nur die Geraden, gilt: Eine von einem Brennpunkt ausgehende Gerade wird an der Hyperbel so reflektiert, dass sie durch den anderen Brennpunkt geht. In dieser Formulierung ist das dieselbe Eigenschaft wie bei der Ellipse!}

Verifikation des Reflexionsverhaltens

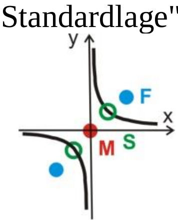
Der einfallende Strahl geht von **F_2** nach **P**, der reflektierte von **P** so weiter, dass die Rückwärtsverlängerung nach **F_1** geht.
Damit auch: Die Summe der Einheitsvektoren von - $\overrightarrow{\mathbf{PF_1}}$ und $\overrightarrow{\mathbf{PF_2}}$ ist kollinear zu **n** (Normale auf die Tangente in **P**).



P$(x_o \mid y_o)$; **F_1**$(-e \mid 0)$; **F_2**$(e \mid 0)$
$\mathbf{v_1} = \overrightarrow{\mathbf{PF_1}} = \begin{pmatrix} -e - x_o \\ -y_o \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \overrightarrow{\mathbf{PF_2}} = \begin{pmatrix} e - x_o \\ -y_o \end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_o/a^2 \\ -y_o/b^2 \end{pmatrix}$
Für den Betrag wurde oben angegeben: $|\mathbf{v_1}| = \pm (a + x_o e / a)$; $|\mathbf{v_2}| = \pm (a - x_o e / a)$
Sei **P** auf dem rechten Hyperbelast, also $x_o \geq a$.
Dann $|\mathbf{v_1}| = + (a + x_o e / a)$; $|\mathbf{v_2}| = - (a - x_o e / a)$ {damit beides positiv}
Summe $\mathbf{v_{SUM}} = - \mathbf{v_1} / |\mathbf{v_1}| + \mathbf{v_2} / |\mathbf{v_2}|$
x-Koordinate: $- (-e - x_o) / (a + x_o e / a) - (e - x_o) / (a - x_o e / a)$
y-Koordinate: $+ y_o / (a + x_o e / a) + y_o / (a - x_o e / a)$
zusammengefasst
x-Koordinate: $2 a x_o (a^2 - e^2) / (a^4 - e^2 x_o^2)$
y-Koordinate: $2 a^3 y_o / (a^4 - e^2 x_o^2)$
Kollinear zu **n**?
y-Koordinate: $= \lambda\, \mathbf{n}_{(y)} = \lambda \cdot -y_o / b^2$ mit $\lambda = - 2 a^3 b^2 / (a^4 - e^2 x_o^2)$
x-Koordinate: $= \mu\, \mathbf{n}_{(x)} = \mu\, x_o / a^2$ mit $\mu = 2 a^3 (a^2 - e^2) / (a^4 - e^2 x_o^2)$
Mit $e^2 = a^2 - b^2$ ist $\lambda = \mu$.
Damit der gleiche Faktor für beide Koordinaten und insgesamt lineare Abhängigkeit.
→ Die Summe der Einheitsvektoren $\mathbf{v_{SUM}}$ ist kollinear zu **n**, $\mathbf{v_{SUM}} = \lambda\, \mathbf{n}$. ☑

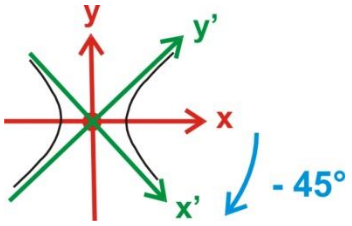
6.4 Standardlage

Üblich ist auch hyp: **y = 1 / x** bzw. allgemeiner hyp: **y = c / x**. "Standardlage"
Dies entspricht einer gleichseitigen Hyberbel, a = b,
die so gedreht ist, dass die Asymptoten in den Koordinatenachsen liegen. (→ Drehung um 45°)



Normallage: hyp: $x^2 - y^2 = a^2$
Standardlage: hyp: $x\, y = a^2 / 4$
Vergleich:
Normallage: **M**$(0 \mid 0)$; **S**$(\pm a \mid 0)$; **F**$(\pm e \mid 0)$
Standardlage: **M**$(0 \mid 0)$; **S**$(\pm a' \mid \pm a')$; **F**$(\pm e' \mid \pm e')$; $a' = a/\sqrt{2}$; $e' = e/\sqrt{2}$
Für eine Drehung um φ im Gegenuhrzeigersinn (mathematisch positiver Winkel) ist die
Drehmatrix $\mathbf{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Zum einfacheren Überblick eine Skizze.
In der Standardlage sind die Achsen um -45° relativ zur Normallage gedreht.
Eine Drehung um +45° transformiert dann die Punktkoordinaten "Normallage → Standardlage", P(x | y) → P(x' | y').
{Das Umgekehrte für die Transformation "Standardlage → Normallage"}



Umständlich wird die Rechnung, wenn sofort für y die Hyberbelgleichung eingesetzt wird, also z.B. P(x' | c/x') benutzt wird. Schneller ist, zuerst P(x | y) bzw. P(x' | y') zu drehen und dann in die Gleichung einzusetzen!

Beispiel: P(x | y) → P(x' | y') "Normal →Standard"

D(+45°) = $\begin{pmatrix} w & -w \\ w & w \end{pmatrix}$ → $x = w\,x' + w\,y'$; $y = -w\,x' + w\,y'$; $w = 1 / \sqrt{2}$

eingesetzt in $\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$ (Normallage) {Die Standardlage entspricht einer Normallage mit a = b}

$w^2\,\{x'^2 + y'^2 + 2\,x'\,y' - y'^2 - x'^2 + 2\,x'\,y'\} = a^2$

$x'\,y' = a^2 / 2$ bzw. "ohne Striche" $\mathbf{y = c / x}$ mit $\mathbf{c = a^2 / 2}$

6.5 Tangente

Die Formeln fast gleich denen für die Ellipse. {Unterschied 1 Vorzeichen}

Normallage: Hyperbel: hyp: $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$ {Ellipse: el: $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$}

- Tangente am Punkt **P**(x_i | y_i): g_T: $b^2\,x\,x_i - a^2\,y\,y_i = a^2\,b^2$
- Polare zum Pol **Q**(x_o | y_o): pol: $b^2\,x_o\,x - a^2\,y_o\,y = a^2\,b^2$
- Berührbedingung für eine Gerade $y = m\,x + c$: $c^2 = a^2\,m^2 - b^2$
- Tangenten von einem Pol aus: Über die Polare; dann die Berührpunkte durch Schnitt der Polaren mit der Hyperbel; die Tangenten aus 2 bekannten Punkten.

Formale Übung {Herleitung analog zu der Rechnung für die Ellipse}

Tangente

hyp: $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$; $y^2 = b^2 + x^2\,b^2 / a^2$; $d/dx(y^2) = 2y\,dy/dx = 2x\,b^2 / a^2$
an P(x_i |y_i): $dy/dx = (x_i / y_i)\,(b^2 / a^2) = m$
g_T: $(y - y_i) = m\,(x - x_i) = (x_i / y_i)\,(b^2 / a^2)\,(x - x_i)$
Multiplikation mit $(- y_i / b^2)$
$\rightarrow -\,y\,y_i / b^2 = -\,x\,x_i / a^2 + x_i^2 / a^2 - y_i^2 / b^2$
Die letzten zwei Terme ergeben 1, Hyperbel-Berührpunkt B(x_i | y_i)
$\rightarrow x\,x_i / a^2 - y\,y_i / b^2 = 1$ bzw. $b^2\,x\,x_i - a^2\,y\,y_i = a^2\,b^2$ ✓

Berührbedingung

Schnitt von hyp: $b^2\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2 b^2$ mit g: $y = m\,x + c$.
$b^2\,x^2 - a^2\,\{m^2\,x^2 + c^2 + 2\,m\,x\,c\} = a^2\,b^2$
geordnet: $x^2\,\{- a^2\,m^2 + b^2\} + x\,\{- 2\,a^2\,m\,c\} + \{- a^2\,c^2 - a^2\,b^2\} = 0$
Diskriminante für $A\,x^2 + B\,x + C = 0$: $\Delta = 4\,A\,C - B^2 = 0$
$\Delta = 4\,a^4\,m^2\,c^2 - 4\,a^2\,b^2\,c^2 + 4\,a^4\,m^2\,b^2 - 4\,a^2\,b^4 - 4\,a^4\,m^2\,c^2 = 0$
$\rightarrow -\,c^2 + a^2\,m^2 - b^2 = 0$ ✓

Polare

(Der Pol **P**(x_o | y_o) liege außerhalb der Hyperbel. Die Tangenten gehen durch diesen Pol und die Berührpunkte **B**$_i$(x_i | y_i).)
$t_1 \rightarrow b^2\,x_o\,x_1 - a^2\,y_o\,y_1 = a^2\,b^2$
$t_2 \rightarrow b^2\,x_o\,x_2 - a^2\,y_o\,y_2 = a^2\,b^2$
Subtrahiert: $b^2\,x_o\,(x_1 - x_2) - a^2\,y_o\,(y_1 - y_2) = 0$
Umgestellt: $(y_1 - y_2) = b^2\,x_o\,(x_1 - x_2) / (a^2\,y_o)$
Steigung der Geraden durch die Berührpunkte {das ist die Polare}

$m = \Delta y / \Delta x = (b^2 / a^2)\ (x_o / y_o)$
$y - y_1 = m\ (x - x_1) \rightarrow y = (b^2 / a^2)\ (x_o / y_o)\ (x - x_1) + y_1$
multipliziert mit $a^2\ y_o$
$a^2\ y\ y_o = b^2\ x\ x_o - b^2\ x_1\ x_o + a^2\ y_o\ y_1$
Multipliziert mit (-1). Die beiden letzten Terme sind t_1 am Berührpunkt **B_1**.
$b^2\ x\ x_o - a^2\ y\ y_o = a^2\ b^2$ ✓

Tangenten in der *Standardlage*: siehe Übung 4

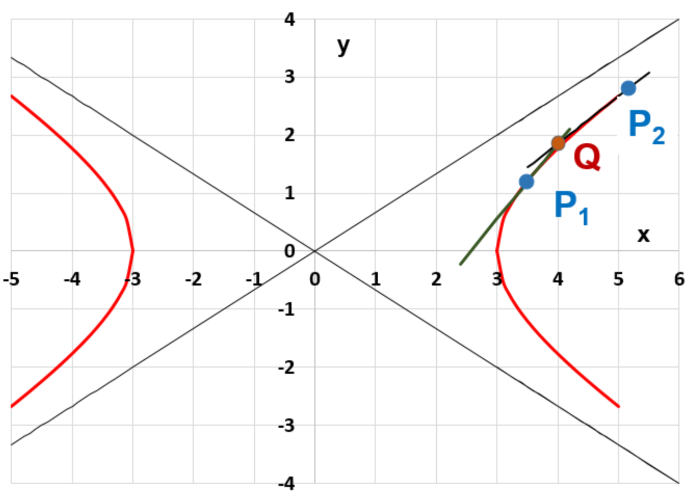
Eine Hyperbel hat zwei Äste. Für eine **Tangente an einem Berührpunkt** liegt die Tangente trivialerweise am gleichen Ast.

Interessanter ist die Lage der Berührpunkte und **Tangenten von einem Pol** aus. Dazu zwei (genaue) Grafiken (EXCEL).
Hyperbel: a = 3; b = 2; Normallage; Hyperbel: "rot"; Asymptoten: "schwarz"
Hyperbel: $x^2 / 9 - y^2 / 4 = 1$ bzw. $4\ x^2 - 9\ y^2 = 36$
Asymptoten: $y = \pm (b/a)\ x = \pm (2/3)\ x$

1. Pol **Q**$(x_o \mid y_o)$ = **Q**$(4 \mid 20 \cdot \sqrt{13} / 39) \approx$ **Q**$(4 \mid 1{,}849)$
Polare: pol: $b^2\ x_o\ x - a^2\ y_o\ y = a^2\ b^2 \rightarrow 16\ x + 60/\sqrt{13}\ y - 36 = 0$
$\rightarrow y = 4\sqrt{13}/15\ x - 9\sqrt{13}/15 \approx 0{,}9615\ x - 2{,}163$
Dies in die Hyperbel eingesetzt:
$4\ x^2 - 9\ \{0{,}9245\ x^2 + 4{,}679 - 4{,}159\ x\} - 36 = -4{,}321\ x^2 + 37{,}43\ x - 78{,}11 = 0$
Mit den gerundeten Zwischenergebnissen: $x_1 = 3{,}505$; $x_2 = 5{,}157$
{Ungerundet gerechnet ist.: $x_1 = 7/2 = 3{,}5$; $x_2 = 31/6 \approx 5{,}167$}
y-Werte dazu durch Einsetzen von x in die Polare: $y_1 = \sqrt{13} / 3$; $y_2 = 7\sqrt{13} / 9$
Damit kennen wir die Berührungspunkte.
Berührpunkte: $P_1(3{,}5 \mid 1{,}202)$; $P_2(5{,}167 \mid 2{,}804)$
Geradengleichungen für die Tangenten jeweils aus Pol und Berührpunkt.
$y = m\ x + c$ mit $m = (y_i - y_o)/(x_i - x_o)$ und $c = y_i - m\ x_i$

Tangente 1: T1: $m = (\sqrt{13} / 3 - 20 \cdot \sqrt{13} / 39) / (7/2 - 4) = 14\sqrt{13} / 39 \approx 1{,}294$;
$c = \sqrt{13} / 3 - 14\sqrt{13} / 39 \cdot (7/2) = -12\sqrt{13} / 13 \approx -3{,}328$
Tangente 2: T2: $m \approx 0{,}8188$; $c \approx -1{,}426$

Die Steigungen der Tangenten sind größer als der Grenzwert der Asymptotensteigung 2/3.
Je näher am Scheitel der Berührpunkt liegt, desto steiler ist die Tangente. (Nicht mehr eingezeichnet ist die Polare durch die beiden Berührungspunkte. Deren Steigung 0,961 liegt zwischen den Tangentensteigungen und ist auch größer als die Asymptotensteigung.) Beide Tangenten schneiden keinen Punkt auf dem linken Hyperbelast.

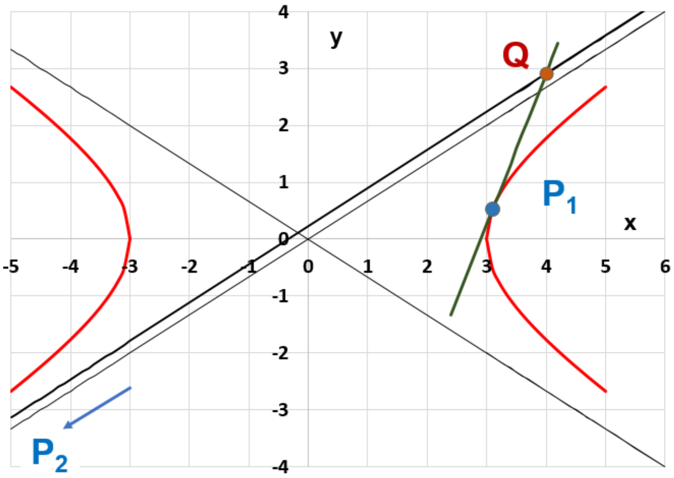


2. Pol so, dass ein Berührpunkt näher am rechten Scheitel liegt (bei $x = 3{,}1$) und der Pol oberhalb der Asymptoten liegt.
Pol ≈ $Q(4 \mid 2{,}902)$
Analoge Rechnung
Polare $y \approx 0{,}9615\,x - 1{,}378$
Berührpunkte: $P_1(3{,}1 \mid 0{,}5207)$; $P_2(-27{,}5 \mid -18{,}22)$
Tangenten: T1: $y \approx 2{,}646\,x - 7{,}682$; T2: $y \approx 0{,}6707\,x + 0{,}2195$

Die Berührungspunkte liegen jetzt auf zwei verschiedenen Ästen.

Der weit links liegende Berührungspunkt ($x = -27{,}5$) ist nicht mehr gezeichnet. Auch die Tangente dazu ist steiler als die Asymptote ($0{,}6707 > 0{,}6667$).

{Liegt Q innerhalb der Asymptoten, sind beiden Berührungspunkte auf dem gleichen Ast.}



6.6 Lineargebrochene Funktion

Interessanterweise ist die Funktion $y = \frac{m_1\,x + k_1}{m_2\,x + k_2}$ äquivalent einer verschobenen Hyperbel in Standardlage $(y - y_o) = C / (x - x_o)$.

Spezialfälle seien dabei ausgeschlossen! $m_2 \neq 0$ und $m_1\,k_2 \neq m_2\,k_1$ (Nur 1 Gerade oder Parallelen zur x-Achse)

$(x - x_o)\,(y - y_o) = x\,y - x_o\,y - y_o\,x + x_o\,y_o = C$

$\rightarrow y = (y_o\,x + C - x_o\,y_o\,) / (x - x_o) \rightarrow$ erweitert mit m_2 und dann Koeffizientenvergleich

$\rightarrow$ $m_1 = m_2\,y_o$; $k_1 = m_2\,(C - x_o\,y_o)$; $k_2 = -\,m_2\,x_o$

oder: $x_o = -\,k_2 / m_2$; $y_o = m_1 / m_2$; $C = k_1 / m_2 + x_o\,y_o$

Beispiel

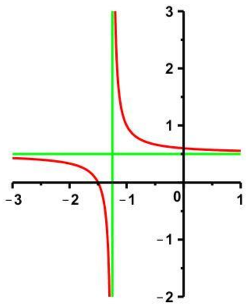
$y = \frac{m_1\,x + k_1}{m_2\,x + k_2} = \frac{2\,x + 3}{4\,x + 5}$

$\mathbf{x_o} = -\,k_2 / m_2 = -5/4$

$\mathbf{y_o} = m_1 / m_2 = 1/2$

$\mathbf{C} = k_1 / m_2 + x_o\,y_o = 1/8$

rot: Hyperbel oder lineargebrochene Funktion
grün: Asymptoten $x = x_o$ und $y = y_o$



6.7 Weitere Übungen

Ü1 Zur Berührbedingung $c^2 = a^2\,m^2 - b^2$

Hyperbel in Normalform, hyp: $b^2\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2\,b^2$
Eine Gerade g: $y = m\,x + c$ ist eine Tangente, falls $c^2 = a^2\,m^2 - b^2$
(Übliche) Herleitung durch Einsetzen: $b^2\,x^2 - a^2\,(m^2\,x^2 + 2\,m\,c\,x + c^2) - a^2\,b^2 = 0$
Geordnet: $x^2\,[b^2 - a^2\,m^2] - x\,[2\,a^2\,m\,c] - [a^2\,b^2 + a^2\,c^2] = 0$
(Übliche) Argumentation: Für $A\,x^2 + B\,x + C = 0$ existiert eine (reelle) Doppellösung, wenn die Diskriminante $\Delta = 4\,A\,C - B^2 = 0$.
$\Delta = -\,4\,[b^2 - a^2\,m^2]\,[a^2\,b^2 + a^2\,c^2] - [-\,2\,a^2\,m\,c]^2 = 0$
Aufgelöst und Faktor "-4" gekürzt: $a^2\,b^4 + a^2\,b^2\,c^2 - a^4\,m^2\,b^2 - a^4\,m^2 c^2 + a^4\,m^2\,c^2 = 0$

Da für eine Hyperbel $a \neq 0$, $b \neq 0$: $b^2 + c^2 - a^2 m^2 = 0$ ✓

! Darin ist eine Forderung an m enthalten!
Diese wird (üblicherweise) nicht mehr gesondert erwähnt!

Nur für $c^2 = a^2 m^2 - b^2 \geq 0$ existiert eine reelle Lösung für c.

{Hinweis: Bei der Ellipse war die Berührbedingung $c^2 = a^2 m^2 + b^2$. Es gibt damit keine einschränkende Bedingung für m. Der Spezialfall $m \to \infty$ und damit $c \to \infty$ bedeutet dann eine Tangente parallel zur y-Achse am linken Scheitel.}

Lösung $x_{1,2} = \{-B \pm [B^2 - 4 A C]\} / (2 A) = a^2 m c \pm a b [b^2 + c^2 - a^2 m^2]\} / (b^2 - a^2 m^2)$

Aus dem Nenner ist unmittelbar der Teil $a^2 m^2 - b^2 \neq 0$ erkennbar.

$m^2 = (b^2 / a^2) \to m = \pm (b / a)$ bedeutet, dass die Tangente gleich der Asymptote ist.

Wegen c = 0 auch eine Ursprungsgerade, wie für die Asymptote gefordert. Für $x_{1,2}$ folgt der unbestimmte Ausdruck "0/0". Formal schneidet die Asymptote die Hyperbel für $x \to \infty$.

➔ Damit eine Gerade eine Tangente ist, gilt die **zusätzliche Forderung $|m| > (b / a)$**.

Wird zu einem Berührpunkt auf der Hyperbel oder von einem Pol auf die Hyperbel die Tangente berechnet, ist die Forderung automatisch erfüllt. Wichtig ist sie nur bei der Fragestellung "Berechne einen Berührpunkt für eine gegebene Gerade y = m x + c".

Ü2 Verschobene Hyperbel (Gleichung, Tangenten)

Hinweis: Der Fall, dass eine Drehung (allein oder zusätzlich zur Verschiebung) vorliegt, wird hier nicht besprochen! {Wie dieses behandelt wird, ist eingehend in Kapitel 8 - 10 gezeigt!}

1. Gleichung der verschobenen Hyperbel

Der Mittelpunkt der Hyperbel sei von **O**(0|0) nach **P**(x_o | y_o) verschoben.

Die Normalform ist $b^2 x_N^2 - a^2 y_N^2 = a^2 b^2$ {**"1"**}

Wenn der Mittelpunkt verschoben ist , ist auch jeder Punkt mit verschoben. Aus der Koordinate x_N entsteht die Koordinate $x = x_N + x_o$. Die Koordinate für die nicht verschobene Hyperbel ist dann $x_N = x - x_o$. Wenn wir "$x - x_o$" einsetzen, gilt also wieder die bekannte Gleichung in der Normalform.

Insgesamt $\to$ $\mathbf{b^2 (x - x_o)^2 - a^2 (y - y_o)^2 = a^2 b^2}$. {**"2"**}.

Dies ist in anschaulicher Form, was präziser als Basistransformation behandelt wird. In der gegebenen Erklärung sind wir stets in einem Basissystem geblieben und haben direkt die Änderung der Koordinaten betrachtet.

Hinweis: Ob mit $b^2 (x - x_o)^2 - a^2 (y - y_o)^2 = a^2 b^2$ oder $(x - x_o)^2 / a^2 - (y - y_o)^2 / b^2 = 1$ gerechnet wird, ist unerheblich. Beide Formeln liefern identische Lösungen. "2" kann auch entwickelt werden, $b^2 x^2$ ... {Man nennt dies "Quadrik".}

Beispiel: Umrechnung "1" $\to$ "2"
$2 x^2 - 3 y^2 = 6$ {präziser könnte man $2 x_N^2 - 3 y_N^2 = 6$ schreiben}
Verschiebung des Mittelpunkts nach **P**(-4 | 5) $\to$ hyp: $2 (x + 4)^2 - 3 (y - 5)^2 = 6$.

Beispiel: Umrechnung der aufgelösten Form "2" Gegeben: $9 x^2 - 4 y^2 - 72 x - 40 y = -8$

a) Koeffizientenvergleich
   Allgemein "2": $b^2 x^2 - 2 x_o b^2 x + b^2 x_o^2 - a^2 y^2 + 2 y_o a^2 y - a^2 y_o^2 = a^2 b^2$
   Direkt ablesbar: $a^2 = 4$; $b^2 = 9$
   Mit kurzer Rechnung: $x_o = 72 / (2 \cdot 9) = 4$; $y_o = - 40 / (2 \cdot 4) = -5$
   Der absolute Term direkt: $a^2 b^2 = 9 \cdot 4 = 36$
   Eventuell als Kontrolle: $- 8 = a^2 b^2 - b^2 x_o^2 + a^2 y_o^2 \to a^2 b^2 = - 8 + 9 \cdot 16 - 4 \cdot 25 = 36$
   $\to$ $9 (x - 4)^2 - 4 (y + 5)^2 = 36$
   oder: Normalform $9 x^2 - 4 y^2 = 36$ verschoben nach P(4 | -5)

b) Quadratische Ergänzung

$9 x^2 - 72 x = 9 (x^2 - 72/9 x) = 9 (x^2 - 8 x) = 9 (x^2 - 8 x + 16) - 144 = 9 (x - 4)^2 - 144$

$- 4 y^2 - 40 y = - 4 (y^2 + 10 y) = - 4 (y + 5)^2 + 100$

$\rightarrow$ $9 (x - 4)^2 - 4 (y + 5)^2 = - 8 - 100 + 144 = 36$

oder: Normalform $9 x^2 - 4 y^2 = 36$ verschoben nach P(4 | -5)

2. Tangente bei verschobener Hyperbel

Für eine Hyperbel in der Normalform {also Mittelpunkt **O**(0|0)}:

Tangente am Punkt **P**(x_i | y_i): t: $b^2 x x_i - a^2 y y_i = a^2 b^2$ {**"3"**}

Wenn die Hyperbel verschoben ist {Mittelpunkt nach **P**(x_o | y_o)}:

$\rightarrow$ Alle Koordinaten verschieben sich.

t: $\mathbf{b^2 (x - x_o) (x_i - x_o) - a^2 (y - y_o) (y_i - y_o) = a^2 b^2}$ {**"4"**}

Wie bei der Hyperbelgleichung kann alternativ mit

$(x - x_o) (x_i - x_o) / a^2 - (y - y_o) (y_i - y_o) / b^2 = 1$ gerechnet werden.

Beispiel: hyp: $2 (x - 3)^2 - 4 (y + 5)^2 = 8$, gesucht sind die Gleichungen der Tangenten an den Berührungspunkten **B**($x_{1,2}$ | $y_{1,2}$) = **B**(9 | y-Wert der Hyperbel zu diesem x).

y-Werte: $2 \cdot 6^2 - 4 (y^2 + 10 y + 25) - 8 = 0 \rightarrow y^2 + 10 y + 9 = 0 \rightarrow y_{1,2} = \{-1; -9\}$

Einsetzen in Tangentengleichung {"4"}

t_1: $2 (x - 3) (9 - 3) - 4 (y + 5) (- 1 +5) = 8 \rightarrow y = 3/4 x - 31/4$

t_2: $2 (x - 3) (9 - 3) - 4 (y + 5) (- 9 +5) = 8 \rightarrow y = - 3/4 x - 9/4$

Ergänzung - Nur zum Verständnis!

Die Normalform zur gegebenen Hyperbel ist $2 x^2 - 4 y^2 = 8$.

Der Berührpunkt hat dann x_1 = "$x - x_o$" = 9 - 3 = 6.

$y_{1,2} \rightarrow 4 y^2 = 64 \rightarrow y_{1,2} = \pm 4$

Für t gilt jetzt Formel "3".

t_1: $2 x \cdot 6 - 4 y \cdot 4 = 8$ $\rightarrow y = 3/4 x - 1/2$

t_2: $2 x \cdot 6 - 4 y \cdot (- 4) = 8$ $\rightarrow y = - 3/4 x + 1/2$

Die Gleichungen gelten ohne Verschiebung. {wie die Normalform}

Verschiebung einer Geraden:

$y = m x + c \rightarrow (y - y_o) = m (x - x_o) + c \rightarrow y = m x + c + y_o - m x_o$

Einsichtig: Eine Verschiebung ändert nicht die Steigung, nur den Achsenabschnitt

$t_1 \rightarrow (-1/2) + (-5) - (3/4) \cdot 3 = - 31/4 \rightarrow t_1$: $y = 3/4 x - 31/4$

$t_2 \rightarrow (1/2) + (-5) - (-3/4) \cdot 3 = - 9/4 \rightarrow t_2$: $y = - 3/4 x - 9/4$

Umständlicher als mit "4" die Gleichungen der Tangenten nach der Verschiebung.

{Bei "4" ist die *Verschiebung schon* in der Formel *berücksichtigt*!}

Ü3 Bestimmung Berührpunkt

Zu einer gegebenen Gerade g sind jeweils die Berührpunkte der dazu parallelen Tangenten an die Hyperbel hyp: $9 x^2 - 4 y^2 = 36$ gesucht - wenn es diese Punkte gibt.

a) g: y = (1/4) x + 5; b) y = (3/2) x + 4; c) g: y = (5/2) x + 3

a) Steigung der "Tangente" (1/4), Steigung der Asymptoten ± (3/2)
   Weil (1/4) < (3/2) gibt es keine Tangente und keinen Berührpunkt.

b) Steigung der "Tangenten" gleich Steigung der Asymptoten
   Es gibt keine Berührpunkte oder formal Berührpunkte bei $x \rightarrow \pm \infty$

c) $(5/2) > (3/2)$; Berührbedingung für g: $y = m\,x + c \rightarrow c^2 = a^2 m^2 - b^2$

$c^2 = 4\,(25/4) - 9 = 16$

Tangenten t_1: $y = (5/2)\,x + 4$; t_2: $y = (5/2)\,x - 4$

Berührpunkte als Schnitt der Hyperbel mit der Tangente

$t_1 \rightarrow 9\,x^2 + 4\,[(5/2)\,x + 4]^2 = 36 \rightarrow x^2 + 5\,x + 25/4 = 0 \rightarrow x = -(5/2)$

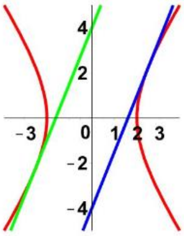
{Einsetzen von x in die Hyperbelgleichung liefert zwei Lösungen für y, von denen eine durch Vergleich ausgewählt werden muss. Für beide gilt die Hyperbelgleichung, aber nur für eine die Tangentengleichung.}

Einfacher: Auflösung der Tangentengleichung $b^2\,x\,x_1 - a^2\,y\,y_1 = a^2\,b^2$

$y = \{b^2\,x_1 / a^2\,y_1\}\,x + \ldots = m\,x + \ldots \rightarrow y_1 = b^2\,x_1 / (a^2\,m) = (9/4)\cdot(-5/2)\cdot(2/5) = -9/4$

Analog für t_2. $9\,x^2 + 4\,[(5/2)\,x - 4]^2 = 36 \rightarrow x = (5/2)$; $y_2 = (9/4)\cdot(5/2)\cdot(2/5) = 9/4$

hyp: $9\,x^2 - 4\,y^2 = 36$
t_1: $y = (5/2)\,x + 4$;
t_2: $y = (5/2)\,x - 4$
B$_1$$(-5/2 \mid -9/4)$
B$_2$$(5/2 \mid 9/4)$



Ü4 Tangenten in der Standardlage

Tangente am Berührungspunkt **B**$(x_i \mid y_i)$: t: $y = (-c / x_i^2)\,x + 2\,c / x_i$

{mit $y_i = c / x_i$}

Polare zum Pol **Q**$(x_o \mid y_o)$: pol: $y = (-y_o / x_o)\,x + 2\,c / x_o$

{dann die Berührpunkte durch Schnitt der Polaren mit der Hyperbel und die Tangenten aus 2 bekannten Punkten}

Tangente (einfachste Herleitung: über Analysis)

Die Steigung der Funktion $f(x) = c / x$ ist $df/dx = -c / x^2$.

Am Punkt **B**$(x_i \mid y_i)$ ist damit die Tangente $y = m\,x + y_i - m\,x_i$; $m = (-c / x_i^2)$.

mit $y_i = c / x_i$: t: $y = (-c / x_i^2)\,x + 2\,c / x_i$

Tangente - Formale Übung

Diese Gleichung müsste auch erhalten werden, wenn die bekannte Gerade {Tangente für eine symmetrische Hyperbel in der Normallage} gedreht wird. Jeder Punkt aus der Normallage geht durch Drehung um +45° in den Punkt in der Standardlage über.

Für +45° ist $\cos(\varphi) = \sin(\varphi) = 1/\sqrt{2} = w$; {$\mathbf{x_A}$ Ausgangslage}

mit $\mathbf{D}(\varphi)^{-1} = \mathbf{D}(\varphi)^{T} = \mathbf{D}(-\varphi)$ ersetzen wir x_A und y_A durch x und y. {$\mathbf{x_A} = \mathbf{D}(-45°)\,\mathbf{x}$}

$x_A\,x_{Ai} - y_A\,y_{Ai} = a^2 = 2\,c \rightarrow (w\,x + w\,y)\,(w\,x_i + w\,y_i) - (-w\,x + w\,y)\,(-w\,x_i + w\,y_i) = 2\,c$

$w^2\,\{x\,x_i + y\,x_i + x\,y_i + y\,y_i - x\,x_i + y\,x_i + x\,y_i - y\,y_i\} = 2\,c$

$(1/2)\,\{2\,y\,x_i + 2\,x\,y_i\} = y\,x_i + x\,y_i = 2\,c$

$\rightarrow y = (-y_i / x_i)\,x + 2\,c / x_i$

und nach Einsetzen von $y_i = c / x_i$ {Berührpunkt liegt auf der Hyperbel}

$\rightarrow$ t: $y = (-c / x_i^2)\,x + 2\,c / x_i$ ✓

Polare - durch formale Überlegung

In der Normalform haben die Gleichungen für die Tangente eine formal gleiche Struktur, siehe 6.5. Nur die Koordinaten des allgemeinen Punkts werden durch die Koordinaten des Pols ersetzt. Das erwarten wir auch in der Standardlage. Dabei dürfen wir nicht die Endgleichung, sondern die vorletzte Gleichung der vorigen Übung betrachten. { $y = (-y_i / x_i)\,x + 2\,c / x_i$}. Für den Pol gilt natürlich nicht "$y_o = c/x_o$".

Für die Normalform pol: $b^2\,x_o\,x - a^2\,y_o\,y = a^2\,b^2$; da wir eine symmetrische Hyperbel betrachten: $x_o\,x - y_o\,y = a^2 = 2\,c$. Die Rechnung für die Drehung ist (bis auf den anderen Index) identisch zur vorigen Übung für die Tangente. Resultat pol: $y = (-y_o / x_o)\,x + 2\,c / x_o$

Polare - direkte Rechnung in der Standardlage

Eine Herleitung auf dem Weg, der bei der Ellipse (Kapitel 4.8) benutzt wurde.

Berührpunkte $\mathbf{B_i}(x_i \mid y_i)$ und Pol $\mathbf{Q}(x_o \mid y_o)$

Tangente am Berührpunkt t_i: $y = (- y_i / x_i)\ x + 2\ c / x_i$

Laut Voraussetzung soll auch der Pol auf diesen Geraden t_i liegen.

$t_1 \rightarrow y_o = (- y_1 / x_1)\ x_o + 2\ c / x_1$

$t_2 \rightarrow y_o = (- y_2 / x_2)\ x_o + 2\ c / x_2$

Auflösung nach $x_i \rightarrow x_{1,2} = (- y_{1,2}\ x_o + 2\ c) / y_o$

$\rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = (x_o / y_o)\ (y_1 - y_2) = - (x_o / y_o)\ \Delta y$

$\rightarrow m = \Delta y / \Delta x = - (y_o / x_o) \rightarrow (y - y_i) = - (y_o / x_o)\ (x - x_i)$

Geradengleichung der Polaren $y = m\ x + k \rightarrow k = y_i - m\ x_i$

$y = - (y_o / x_o)\ x + (y_o / x_o)\ x_i + y_i$

Die zwei letzten Terme aus $t_{1,2}$ ersetzt; $(y_o / x_o)\ x_i + y_i = 2\ c / x_o$

pol: $y = - (y_o / x_o)\ x + 2\ c / x_o$

♦ Ein Rechenweg ohne vereinfachende Annahmen ist möglich.

1) Anstelle der Gleichungen für die Tangenten am Pol - siehe oben - für die Tangenten die Geradengleichungen
   $y = (- y_{1,2} / x_{1,2})\ x + 2\ c / x_{1,2}$
   mit $y_{1,2} = c / x_{1,2}$ also $y = - (c / x_{1,2}^2)\ x + 2\ c / x_{1,2}$.
   {Hier Geradengleichung, vorher Gleichung für einen Punkt}
2) Bestimmung des Schnittpunkts in allgemeiner Form
   Die beiden Tangenten schneiden sich sicher in einem Punkt, wenn sie nicht parallel oder identisch sind.
3) Dieser Schnittpunkt <u>soll</u> der Pol **Q** sein.
   damit liegen zwei Gleichungen vor, mit den Unbekannten $x_{1,2}$
   $x_{1,2}$ können so bestimmt werden (als Funktion von x_o und y_o)
4) Da $x_{1,2}$ für zwei Berührpunkte gilt, ist $y_{1,2} = c / x_{1,2}$
5) Aus zwei Punkten kann die Gerade (= die Polare) bestimmt werden.
   $(y - y_1) / (y_2 - y_1) = (x - x_1) / (x_2 - x_1)$
6) Dies kann nach y aufgelöst werden.

Der wesentliche Unterschied gegenüber der vorigen vereinfachten Herleitung ist das Ersetzen der Gleichung für einen Punkt durch eine Gerade. Erst im 3. Schritt wird dieser Schnittpunkt dem Pol **Q** gleichgesetzt. Die vereinfachte Herleitung ist nicht falsch, sie muss nur richtig interpretiert werden! Gesucht wird ein Punkt $\mathbf{P}(x_o \mid x_o)$ der ein Schnittpunkt von zwei Tangenten an die Parabel ist. Eine Lösung muss sicher der Pol **Q** sein. Wegen der Symmetrien in der Hyperbel kann dies aber auch ein anderer Punkt sein, weil andere Tangenten auch dieselbe Steigung besitzen und sich in einem Punkt schneiden!

Die rechnerische Durchführung ist etwas umständlich.

(2) Der allgemeine Schnittpunkt ist $x_S = 2\ x_1\ x_2 / (x_1 + x_2)$; $y_S = -2\ c\ x_2 / x_1\ (x_1 + x_2) + 2\ c / x_1$

(3) Lösung nach Gleichsetzen von x_S und y_S mit x_o und y_o
    (Umständliche) Lösung des Systems der zwei Gleichungen
    $x_{1,2} = \{c \pm [c^2 - c\ x_o\ y_o]^{1/2}\} / y_o$ und

(4) $y_{1,2} = c\ y_o / \{c \pm [c^2 - c\ x_o\ y_o]^{1/2}\}$

(5) Längerer Ausdruck für die Gerade

(6) Aufgelöst und vereinfacht: $y = (- y_o / x_o)\ x + 2\ c / x_o$ ✓

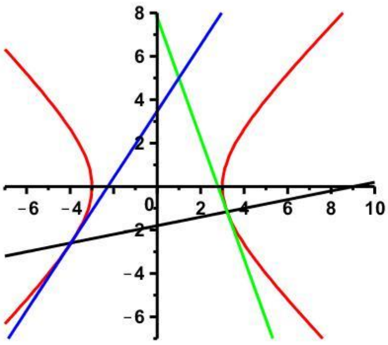
Beispiel

Symmetrische Normalhyperbel $x^2 - y^2 = 9$. Pol **Q**(1 | 5)

Polare $x\,x_o - y\,y_o = 9 \rightarrow y = 1/5\,x - 9/5$
bzw. $y = 0{,}2\,x - 1{,}8$

Berührpunkte (Schnitt Polare / Hyperbel)
B₁(3,22 | -1,16)
B₂(-3,97 | -2,59)

Tangenten (durch **B**ᵢ und **Q**)
t_1: $y = -2{,}78\,x + 7{,}78$
t_2: $y = 1{,}53\,x + 3{,}47$



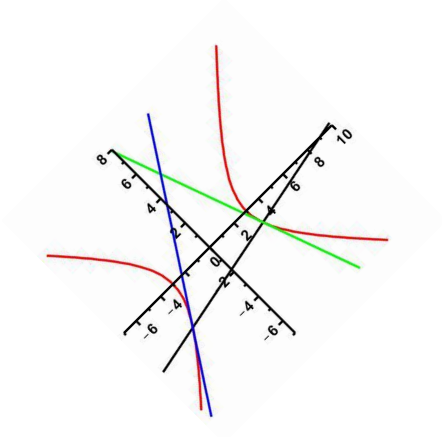
Standardhyperbel dazu:
$c = a^2 / 2 = 4{,}5$
Der Pol ist um +45° gedreht: **Q**(-2,83 | 4,24)
Polare pol: $y = (-y_o / x_o)\,x + 2\,c / x_o \rightarrow y = 1{,}50\,x - 3{,}18$
Schnitt Polare / Hyperbel $y = c / x$:
Berührpunkte **B₁**(3,09 | 1,46); **B₂**(- 0,970 | -4,64)

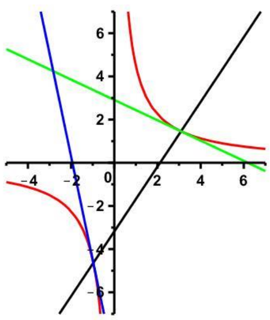
{Diese Berührpunkte müssen auch erhalten werden, wenn die Punkte aus der Normallage um 45° gedreht werden; Beispiel **B₁**: 0,707 [3,22 - (-1,16)] = 3,10; 0,707 [3,22 + (-1,16)] = 1,46}

Tangenten t: $y = (-\,c / x_i^2)\,x + 2\,c / x_i$
t_1: $y = -\,0{,}47\,x + 2{,}91$; $t_2 = -\,4{,}78\,x - 9{,}28$

{Die Tangenten müssen auch durch eine Drehung erhalten werden. Aus $y = m\,x + d$ allgemein $m' = [m \cos(\varphi) + \sin(\varphi)] / [\cos(\varphi) - m \sin(\varphi)]$ und $d' = d / [\cos(\varphi) - m \sin(\varphi)]$.
speziell +45°: $\cos(\varphi) = \sin(\varphi) = 0{,}707$. Für t_1:
$m' = [-\,2{,}78 + 1\,] / [1 - (-\,2{,}78)] = -0{,}47$; $d' = 7{,}78 / \{0{,}707\,[1 - (-\,2{,}78)]\} = 2{,}91$}

Anschaulich:





Grafik Normallage um 45° gedreht   Standardlage berechnet

Bei einer Drehung der des ganzen Objekts in der Normallage (Hyperbel, Polare, Tangenten) entsteht die Anordnung in der Standardlage, aber nun bezogen auf das neue Koordinatensystem. Die relative Lage der Elemente zueinander bleibt gleich, aber alle Elemente haben nun eine andere Koordinatendarstellung. Äquivalent dazu ist offenkundig die Aussage, "das Koordinatensystem ist um - 45° gedreht".