Kegelschnitte - Teil 9

9.1 Eigenwert und Eigenvektor

! Dies ist als "allgemeines Wissen zur Linearen Algebra" eventuell schon bekannt.
Konkrete Angaben hier für eine 2x2-Matrix.

Wenn eine Menge von Vektoren $\{\mathbf{x_i}\}$ gegeben ist, erzeugt eine Operation $\mathbf{M}\ \mathbf{x_i}$ allgemein einen Vektor, der eine Linearkombination mehrerer $\mathbf{x_i}$ ist.

Beispiel: In einem kartesischen Koordinaten System in R_2 zeige $\mathbf{x_1}$ in Richtung der x-Achse, $\mathbf{x_1} = a\ \mathbf{e_X}$. Eine Drehung $\mathbf{M}\ \mathbf{x_1}$ führt allgemein zu einem Vektor, der dann eine x- und y-Komponente hat, also eine Linearkombination der beiden Basisvektoren $\mathbf{e_X}$ und $\mathbf{e_y}$ ist.

Von Interesse ist nun ein Vektor $\mathbf{x}$, der durch $\mathbf{M}\ \mathbf{x}$ nur gestreckt wird, aber nicht die Orientierung ändert (und damit eine Linearkombination anderer Vektoren wird).

➔ Wenn $\mathbf{M}\ \mathbf{x} = \lambda\ \mathbf{x}$ gilt, nennt man λ einen *Eigenwert* und $\mathbf{x}$ einen *Eigenvektor* zu $\mathbf{M}$.

Die Lösung von $(\mathbf{M} - \lambda\ \mathbf{E})\ \mathbf{x} = 0$ mit der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ liefert λ.

Das homogene Gleichungssystem hat nur dann (neben der trivialen Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) eine Lösung, wenn die Determinante $|\mathbf{M} - \lambda\ \mathbf{E}| = 0$.

Beispiel in R^2

♦ Gleichungssystem *in Komponenten* ausgeschrieben:

$\mathbf{M}\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

Damit das lineare Gleichungssystem {zuerst direkt gelöst}:

LGS: $(a - \lambda)\ x + b\ y = 0$

$c\ x + (d - \lambda)\ y = 0$

Lösung, z. B. durch Substitution $y = (\lambda - a)\ x / b$ $\{\text{wenn } b \neq 0\}$

$\{c + (d - \lambda)\ (\lambda - a) / b\}\ x = 0$

Eine Lösung ist $x = 0 \to y = 0$, also die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Für die Eigenwerte eine quadratische Gleichung in λ.

$\lambda^2 - \lambda\ (a + d) + (a\ d - b\ c) = 0$ ("charakteristisches Polynom")

♦ *Direkte* Lösung der *Determinante*:

$|\mathbf{M} - \lambda\ \mathbf{E}| = 0 \to \left|\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}\right| = (a - \lambda)\ (d - \lambda) - b\ c = \lambda^2 - \lambda\ (a + d) + (a\ d - b\ c) = 0\}$

♦ *Direkte* Formel für das *charakteristische Polynom*:

Mit der Spur einer Matrix (= Summe der Diagonalelemente) und der Determinante gilt für das "charakteristische Polynom" auch $\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Spur}(M) + \det(M) = 0$.

$\text{Spur}(M) = a + d$; $\det(M) = a\ d - b\ c$.

Die Eigenvektoren folgen mit Einsetzen von λ in das lineare Gleichungssystem. Weil ein homogenes Gleichungssystem vorliegt, hat die Lösung jeweils einen freien Parameter. Dieser freie Parameter wird meistens eliminiert, indem die Eigenvektoren normiert werden.

- Die erhaltenen Eigenvektoren $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ werden spaltenweise nebeneinander angeordnet und bilden so die Matrix $\mathbf{R}$.
- Die Eigenwerte werden diagonal zur Matrix $\mathbf{\Lambda}$ angeordnet.

Es gilt schließlich $\mathbf{M}\ \mathbf{R} = \mathbf{R}\ \mathbf{\Lambda}$. {⊗}

Wenn $\mathbf{R}$ invertierbar (nicht singulär) ist, dann ist auch $\mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{M}\ \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$. {"**R** diagonalisiert **M**"}

{Dies wird auch "Ähnlichkeitstransformation" genannt.}

⊗ kann mit einer Überlegung zur Struktur der Matrizen verifiziert werden.
R enthält die Eigenvektoren $\mathbf{x_i}$ spaltenweise nebeneinander, $\mathbf{R} = (\mathbf{x_1}\ \ \mathbf{x_2})$
MR enthält spaltenweise nebeneinander $(\mathbf{Mx_1}\ \ \mathbf{Mx_2})$.

1. Zeile von $\mathbf{Mx_i}$ liefert jeweils die 1. Komponente. $\{(\mathbf{Mx_i})_1 = \Sigma_{(k)}\, \mathbf{M}_{1k}\, (\mathbf{x_i})_k\}$
die 2. Zeile von $\mathbf{Mx_i}$ liefert jeweils die 2. Komponente.
Da $\mathbf{x_i}$ ein Eigenvektor ist, gilt $\mathbf{Mx_i} = \lambda_i\, \mathbf{x_i}$
sei $\mathbf{x} = \mathbf{x_1}$: $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}x_1 + M_{12}x_2 \\ M_{21}x_1 + M_{22}x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

→ $\mathbf{MR} = (\lambda_1\, \mathbf{x_1}\ \ \lambda_2\, \mathbf{x_2})$; $\mathbf{MR} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^{(1)} & \lambda_2 x_1^{(2)} \\ \lambda_1 x_2^{(1)} & \lambda_2 x_2^{(2)} \end{pmatrix}$

$\mathbf{R\Lambda} = (\mathbf{x_1}\ \ \mathbf{x_2})\ \mathrm{diag}(\lambda_1\ \lambda_2)$

Zeile i (von **R**) · Spalte 1 (von **Λ**) = i-te Komponente von $\lambda_1\, \mathbf{x_1}$
$\{(\mathbf{R\Lambda})_{11} = \Sigma_{(k)}\, \mathbf{R}_{1k}\, \mathbf{\Lambda}_{k1} \rightarrow \mathbf{\Lambda}_{11} = \lambda_1$; die anderen $\mathbf{\Lambda}_{k1} = 0 \rightarrow (\mathbf{R\Lambda})_{11} = \mathbf{R}_{11}\, \lambda_1 = \lambda_1\, (\mathbf{x_1})_1$
$(\mathbf{R\Lambda})_{21} = \Sigma_{(k)}\, \mathbf{R}_{2k}\, \mathbf{\Lambda}_{k1} \rightarrow$ nur $\mathbf{\Lambda}_{11} \neq 0 \rightarrow (\mathbf{R\Lambda})_{21} = \mathbf{R}_{21}\, \lambda_1 = \lambda_1\, (\mathbf{x_1})_2\}$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^{(1)} & \lambda_2 x_1^{(2)} \\ \lambda_1 x_2^{(1)} & \lambda_2 x_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

→ gesamt $\mathbf{R\Lambda} = (\lambda_1\, \mathbf{x_1}\ \ \lambda_2\, \mathbf{x_2})$; also gleich **MR**. ✓

<u>Wenn</u> die Matrix **M** <u>symmetrisch</u> ist, <u>dann</u> gelten weitere Bedingungen.
{Für unseren Zusammenhang, die Transformation von Kegelschnitten, <u>ist</u> **M** eine symmetrische 2x2-Matrix!}

- Die Eigenwerte sind reell und verschieden.
- Die Eigenvektoren sind orthogonal zueinander.
- Wenn die Eigenvektoren zusätzlich normiert sind, also orthonormal, dann ist R eine orthogonale Matrix. Dann ist auch $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$. Die Ähnlichkeitstransformation ist dann einfacher $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{M}\, \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$.

Sei $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ und sei $b \neq 0$ und nur a oder $c = 0$ aber nicht $a = c = 0$.

Sonderfälle: $b = 0$: Dann ist **M** schon diagonal und a, c sind die Eigenwerte;
$a = c = 0$: Eigenwerte $\pm$ b;
a oder $c = 0$: Eigenwerte 0 und a oder c (der $\neq 0$ Wert);
$a = b = c = 0$: Eigenwert 0.

charakteristisches Polynom $\lambda^2 - \lambda\, (a + c) + (a\, c - b^2) = 0$
$\lambda_{1,2} = (a+c)/2 \pm [(a+c)^2/4 - ac + b^2]^{1/2}$.
Der Wurzelterm ist $(1/2)\, [(a^2 + 2\, ac + c^2 - 4\, ac + 4\, b^2]^{1/2}$.
$(a - c)^2 + 4\, b^2$ ist sicher > 0
(außer für den Sonderfall $a = c$ und $b = 0$, also ein Vielfaches der Einheitsmatrix).
→ es gibt 2 verschiedene Eigenwerte $\lambda_{1,2}$. ✓

Sei der Eigenvektor $\mathbf{x_i}$ als 1-spaltige Matrix $\mathbf{X_i}$ geschrieben. Dann gilt ebenfalls die Eigenwertgleichung $\mathbf{M}\, \mathbf{X_i} = \lambda_i\, \mathbf{X_i}$. Dem Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{x_1} \bullet \mathbf{x_2}$ entspricht dann das Matrixprodukt $\mathbf{X^T_1}\, \mathbf{X_2}$. **M** ist symmetrisch, also $\mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}$.
$\lambda_1\, \mathbf{X_1} = \mathbf{M}\, \mathbf{X_1}$
Dann ist auch $(\lambda_1\, \mathbf{X_1})^{\mathrm{T}} = \lambda_1\, \mathbf{X_1}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{M}\, \mathbf{X_1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{X_1}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \mathbf{X_1}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{M}$
Rechtsmultiplikation mit $\mathbf{X_2}$: $\lambda_1\, \mathbf{X_1}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{X_2} = \mathbf{X_1}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{M}\, \mathbf{X_2}$
Mit $\mathbf{M}\, \mathbf{X_2} = \lambda_2\, \mathbf{X_2}$ ist dies $\lambda_2\, \mathbf{X_1}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{X_2}$; es ist damit $(\lambda_1 - \lambda_2)\, \mathbf{X_1}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{X_2} = 0$
Weil für die symmetrische Matrix **M** die Eigenwerte verschieden sind, muss das Skalarprodukt $\mathbf{x_1} \bullet \mathbf{x_2} = 0$ sein.
→ Die Eigenvektoren sind orthogonal zueinander. ✓

♦ 9.1.1 Beispiel - nicht symmetrische Matrix

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$; Spur(**M**) = 7; det(**M**) = -8

charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Spur}(M) + \det(M) = \lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0$

♦ Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = (7/2) \pm [(49/4) + 8]^{1/2} = (7/2) \pm (9/2) =$ {8; -1}

♦ Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 8$ $\quad (2 - 8)\,x + 3\,y = 0$

$\quad 6\,x + (5 - 8)\,y = 0$

$\quad$ Homogenes Gleichungssystem: Sei (Parameter) $y = 1 \rightarrow x = 1/2$

$\lambda_2 = -1$ $\quad (2 + 1)\,x + 3\,y = 0$ {und linear abhängige Zeile 2} $\rightarrow y = 1 \rightarrow x = -1$

$\mathbf{x_1}$; $\mathbf{x_2}$: $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; wenn gewünscht, normiert $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

{Alternativ kann $\mathbf{x_i}$ mit einem Parameter t geschrieben werden, z.B. $\begin{pmatrix} t/2 \\ t \end{pmatrix}$. Eine nachfolgende Normierung führt dann zum gleichen Vektor wie die Wahl eines bestimmten Werts, z.B. t = 1.}

Verifikation einiger Beziehungen:

• $\mathbf{M\,x} = \lambda\,\mathbf{x}$

. λ_1: $M\,x_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $l_1\,x_1 = 8 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ✓

λ_2: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

• $\mathbf{M\,R} = \mathbf{R\,\Lambda} = (\lambda_1\,\mathbf{x_1}\ \ \lambda_2\,\mathbf{x_2})$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ {λ_i $\mathbf{x_i}$ siehe oben} ✓

• $\mathbf{R^{-1}\,M\,R} = \mathbf{\Lambda}$

$\mathbf{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (1/3) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{M\,R} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{R^{-1}\,M\,R} = (1/3) \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ✓

• $\mathbf{R^{-1}} \neq \mathbf{R^T}$. $(1/3) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; {auch nicht nach Normierung!}

(Eventuell triviale) Anmerkungen:

• Die richtige Zuordnung ist zu beachten. Es gilt nicht $\mathbf{M\,x_1} = \lambda_2\,\mathbf{x_1}$ oder $= \lambda_1\,\mathbf{x_2}$

$\mathbf{M\,x_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\lambda_2\,\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_1\,\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}$

• Ein beliebiges Vielfaches von $\mathbf{x_i}$ ist auch ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i

$\mathbf{M}\,(a\,\mathbf{x_i}) = a\,\mathbf{M\,x_i}$ {auch schon einsichtig wegen der Wahl eines freien Parameters}

♦ 9.1.2 Beispiel - Symmetrische Matrix

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 11/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 9/4 \end{pmatrix}$;

Spur(**M**) = 5; det(**M**) = 6

charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Spur}(M) + \det(M) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

♦ Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 5/2 \pm [25/4 - 6]^{1/2} =$ {2; 3}

♦ Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2$ $\quad (11/4 - 2)\,x - \sqrt{3}\,/4\,y = 0 \rightarrow 3\,x - \sqrt{3}\,y = 0$

{Die zweite Zeile liefert nichts Neues, wie für ein homogenes System gefordert.}

Sei (freier Parameter) $y = 1 \rightarrow x = 1/\sqrt{3}$

$\lambda_2 = 3$ $\quad (11/4 - 3)\,x - \sqrt{3}\,/4\,y = 0 \rightarrow -x - \sqrt{3}\,y = 0$

Sei $y = 1 \rightarrow x = \sqrt{3}$

$\mathbf{x_1}$; $\mathbf{x_2}$: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Weitere Überlegungen zu den Eigenvektoren

- Die Eigenvektoren sind orthogonal: $\mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_2} = 0$
- Damit die Matrix $\mathbf{R} = (\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2})$ orthogonal ist, <u>müssen</u> x_1 und x_2 normiert sein!

  $\mathbf{x_1}$: $1/3 + 1 = 4/3 \to$ Multiplikation mit $\sqrt{3}/2 \to \mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

  $\mathbf{x_2}$: $3 + 1 = 4 \to$ Multiplikation mit $1/2 \to \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

  Damit $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ und dann gilt $\mathbf{R}^T\, \mathbf{M}\, \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$.
- Sei $\mathbf{S}$ die Matrix aus den <u>nicht</u> normierten Vektoren $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ dann gilt $\mathbf{S}^{-1}\, \mathbf{M}\, \mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}$.

  $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & 3/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 9/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

  {aber nicht mehr $\mathbf{S}^T\, \mathbf{M}\, \mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}$!}
- Aufgrund einer "Vermutung" vergleichen wir $\mathbf{R}$ mit der allgemeinen Drehmatrix.

  $\mathbf{R_{Drehung}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

  Es gilt für $\varphi = 60°$ $\cos(\varphi) = 1/2$ und $\sin(\varphi) = \sqrt{3}/2$

  R entspricht anschaulich einer **Drehung**. Die angegebenen Vektoren $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ sind die Koordinatendarstellung im alten Ausgangssystem (meistens dem kartesischen Koordinatensystem).
- Bei dieser Interpretation als Drehung ist eine zusätzliche Überlegung nötig. Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist auch ein Eigenvektor. Wählen wir als einfachstes Beispiel eine Vorzeichenänderung von $\mathbf{x_2}$.

  Dann wäre $\mathbf{R_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Auch $\mathbf{R_{(2)}}$ ist eine orthogonale Matrix, aber sie ist mit keiner Rotationsmatrix verträglich!

  Es existiert also eine **zusätzliche Bedingung**! Die Determinanten sind verschieden! $\det(\mathbf{R}) = +1$, $\det(\mathbf{R_{(2)}}) = -1$.

  ➔ Der Betrag der Determinante muss 1 sein, damit die Matrix orthogonal ist.

  ➔ Die **Determinante muss +1** sein, **damit** die Matrix als **Drehmatrix** interpretierbar ist.
- Wenn die Determinante -1 ist, handelt es sich geometrisch um eine Drehspiegelung. Die Diagonalisierung ist trotzdem möglich, <u>nur</u> eine Interpretation als Drehung ist nicht mehr möglich! {In der Herleitung wird nur ein orthogonales R verwendet!}

  Die Struktur einer Matrix für die Drehspiegelung ist

  $\mathbf{R_{Drehspiegelung}} = \begin{pmatrix} \cos(2\,\varphi) & \sin(2\,\varphi) \\ \sin(2\,\varphi) & -\cos(2\,\varphi) \end{pmatrix}$

  Geometrisch ist das eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden mit Steigungswinkel φ, g: $y = \tan(\varphi)\, x$. {Weitere Erklärung: 7.5.4}

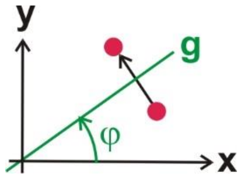
♦ 9.1.3 Mehrdeutigkeit

λ_1 und λ_2 haben zwei bestimmte Werte, aber für die Anordnung als Matrix $\mathbf{\Lambda}$ gibt es zwei Möglichkeiten. Ebenso ist neben dem Eigenvektor $\mathbf{x_i}$ jedes beliebige Vielfache a $\mathbf{x_i}$ auch ein Eigenvektor. So bleibt auch nach einer Normierung noch die Wahl $\pm\, \mathbf{x_i}$!

{Durch eine "geeignete" Anordnung in $\mathbf{\Lambda}$ und "geeignete" Vorzeichenwahl kann so eine Matrix **R** erhalten werden, die als Drehmatrix interpretierbar ist!}

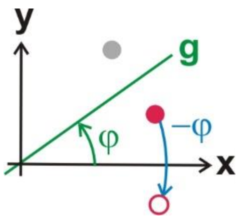
♦ 9.1.4 Weitere Erklärung - Matrix für die Drehspiegelung

Zu spiegeln ist an einer Geraden
g: $y = \tan(\varphi)\, x$.

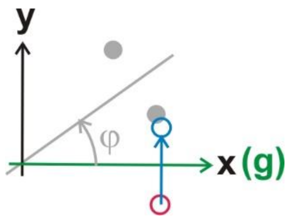


Drehspiegelung S(φ) = $\begin{pmatrix} \cos(2\,\varphi) & \sin(2\,\varphi) \\ \sin(2\,\varphi) & -\cos(2\,\varphi) \end{pmatrix}$

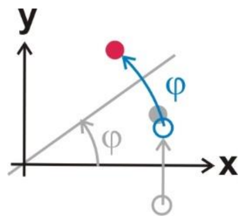
A) Elegant ist eine kurze geometrische Überlegung.
{Dies ist der Zweck einer "Ähnlichkeitstransformation" - Erzeugung eines einfacher zu behandelnden Problems!}



1. Soweit (-φ) drehen, dass die Gerade g in der x-Achse liegt.



2. Spiegeln an g (= x-Achse nach der Drehung)



3. Zurückdrehen (+φ)
Das entspricht der (direkten) Spiegelung an g

S(φ) = **D**(φ) **S**$_x$ **D**(-φ) {**S**$_x$ Spiegelung an der x-Achse}

S$_x$ D(-φ) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$

S(φ) = $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$

S$(\varphi)_{11} = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = \cos(2\varphi)$ ✓
S$(\varphi)_{12} = \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi) = \sin(2\varphi)$; $R_{21} = R_{12}$ ✓
S$(\varphi)_{22} = \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi) = -\cos(2\varphi)$ ✓

B) Weniger elegant ist eine direkte Behandlung der Spiegelung an der Geraden.

1. Vektorgleichung der Geraden g, Richtungsvektor **u** {Ursprungsgerade}
2. Normale **n** dazu {einfach in R^2}
3. Gerade g_n durch einen Punkt **P**$(x_o \mid y_o)$ in Richtung der Normalen
4. Schnittpunkt **S** von g_n mit g {"Lotfußpunkt", muss aber nicht explizit berechnet werden!}
5. Der Spiegelpunkt **P'** liegt dann in Richtung g_N gleich weit entfernt.
6. Umstellen des Zusammenhangs $(x', y') = f(x_o, y_o)$
   Darin die Koeffizienten der Matrix abzulesen.

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \tan(\varphi) \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow g_n\!: \mathbf{x} = \mathbf{x_o} + t\,\mathbf{n}$

Schnitt g mit g_n: Nur 1 Parameter t durch direktes Rechnen in Koordinaten
{Ausdruck für g_n in g eingesetzt}
g: $y = \tan(\varphi)\, x$; g_n: $x = x_o + t \cdot \tan(\varphi)$; $y = y_o + t \cdot (-1) = y_o - t$
g_n in g: $y_o - t = x_o \cdot \tan(\varphi) + t \cdot \tan^2(\varphi) \rightarrow t = [y_o - x_o \cdot \tan(\varphi)] / [1 + \tan^2(\varphi)]$
S liegt ausgehend von **P** bei $\mathbf{x_o} + t\,\mathbf{n}$ → **P'** liegt bei $\mathbf{x_o} + 2\,t\,\mathbf{n}$.

$x' = x_o + 2\,[y_o - x_o \cdot \tan(\varphi)]\tan(\varphi) / [1 + \tan^2(\varphi)]$
$y' = y_o - 2\,[y_o - x_o \cdot \tan(\varphi)] / [1 + \tan^2(\varphi)]$

$x' = x_o\,[1 - \tan^2(\varphi)] / [[1 + \tan^2(\varphi)] + y_o\,[2\tan(\varphi)] / [1 + \tan^2(\varphi)]$
$y' = x_o\,[2\tan(\varphi)\,] / [1 + \tan^2(\varphi)] + y_o\,[\tan^2(\varphi) - 1] / [1 + \tan^2(\varphi)]$

Umformungen: $1 / [1 + \tan^2(\varphi)] = \cos^2(\varphi)$; $1 - \tan^2(\varphi) = [\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)] / \cos^2(\varphi)$

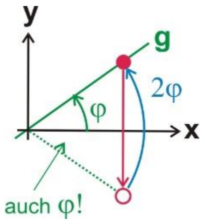
$\mathbf{S}(\varphi)_{11} = [\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)] \cdot \cos^2(\varphi) / \cos^2(\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = \cos(2\varphi)$ ✓
$\mathbf{S}(\varphi)_{12} = R_{21} = 2 \tan(\varphi) \cos^2(\varphi) = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) = \sin(2\varphi)$ ✓
$\mathbf{S}(\varphi)_{22} = - [\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)] \cdot \cos^2(\varphi) / \cos^2(\varphi) = - \cos(2\varphi)$ ✓

C) Auch **elegant** ist eine andere geometrische Überlegung. In A) und B) wurde direkt die Definition "**S**(φ) entspricht einer Spiegelung an einer Geraden mit der Steigung φ" verwendet. Möglich ist aber auch: "S(φ) entspricht einer Spiegelung an der x-Achse, gefolgt von Drehung um 2φ." {Beachten: Die Matrix S(φ) enthält auch cos(2φ) und sin(2φ)!}

Eine alternative Formulierung ist: "Ein um den Winkel φ, relativ zur x-Achse, gedrehter Vektor bleibt bei der Operation S(φ) fest."

Geometrisch ist das am einfachsten durch den Sonderfall eines Punkts, der auf der Geraden g liegt, einzusehen.

Durch Reflexion an der x-Achse und nachfolgende Drehung um den Winkel 2 φ entsteht wieder derselbe Punkt.



Rechnerisch:

$$\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \checkmark$$

C) **S**(φ) ist eine orthogonale Matrix. Damit ist $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$. Wegen der Symmetrie ist aber auch $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$. Es liegt also eine "**selbstinverse**" Matrix vor: $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E}$

D) Es gilt $\mathbf{D}(\alpha)\, \mathbf{D}(\beta) = \mathbf{D}(\alpha+\beta)$ und $\mathbf{D}(\alpha)\, \mathbf{D}(\beta) = \mathbf{D}(\beta)\, \mathbf{D}(\alpha)$ {kommutativ}.
Gilt Analoges auch für **S**? Nein! {z.B. durch Ausmultiplizieren kontrollieren.}
$\mathbf{S}(\alpha)\, \mathbf{S}(\beta) \neq \mathbf{S}(\alpha+\beta)$ und $\mathbf{S}(\alpha)\, \mathbf{S}(\beta) \neq \mathbf{S}(\beta)\, \mathbf{S}(\alpha)$

9.2 Anwendung auf die Quadrik

In R^2 ist der allgemeine Ausdruck Q_{Allg}: $A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$.
Alle Kegelschnitte sind in dieser Formel enthalten.

Der wesentliche Schritt ist die Elimination des gemischten Terms B x y.

Wir betrachten als Erstes die quadratische Form $Q = A x^2 + B x y + C y^2$.

Q lässt sich auch darstellen als $Q = \mathbf{x}^T \mathbf{M}\, \mathbf{x} = (x\ y) \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

{Gegebenenfalls Verifikation durch Ausmultiplizieren}

Eine quadratische Form ohne gemischtes Glied ist $Q = \mathbf{x}'^T \mathbf{M}'\, \mathbf{x}' = (x'\ y') \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

{$Q = A' x'^2 + B' y'^2$}

Ein Übergang $\mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ ist allgemein als "Eigenwertproblem" bekannt. Diese Diagonalisierung geschieht mit einer "Ähnlichkeitstransformation" $\mathbf{M}' = \mathbf{R}^{-1}\, \mathbf{M}\, \mathbf{R}$.

M ist hier (für das angegebene Q) eine symmetrische Matrix. Dann ist **R** (nach Normierung der Spalten) eine orthogonale Matrix und dafür gilt $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, also $\mathbf{M}' = \mathbf{R}^T\, \mathbf{M}\, \mathbf{R}$.
Dann beschreibt **R** auch den Zusammenhang zwischen **x** und **x'**.
Verifikation: Sei $\mathbf{x} = \mathbf{R}\, \mathbf{x}'$. Dann: $\mathbf{x}^T = (\mathbf{R}\, \mathbf{x}')^T = \mathbf{x}'^T\, \mathbf{R}^T$. Dies eingesetzt:
$\mathbf{x}^T\, \mathbf{M}\, \mathbf{x} = (\mathbf{x}'^T\, \mathbf{R}^T)\, \mathbf{M}\, (\mathbf{R}\, \mathbf{x}') = \mathbf{x}'^T\, (\mathbf{R}^T\, \mathbf{M}\, \mathbf{R})\, \mathbf{x}' = \mathbf{x}'^T\, \mathbf{M}'\, \mathbf{x}'$

Q kann also mit diesem Zusammenhang in zwei verschiedenen Formen angegeben werden.

➔ **Vergleich mit den allgemeinen Angaben zu "Eigenwerte/Eigenvektoren":**
M' entspricht der Diagonalmatrix der Eigenwerte **Λ** und **x'** sind die Eigenvektoren!
R ist die Matrix mit den spaltenweise angeordneten orthonormalen **x'**.
Zusammenhang zwischen Eigenvektoren und dem Ausgangssystem: **x = R x'**

Q_{Allg} enthält noch lineare Terme in x, y. $D\,x + E\,y = \mathbf{k}^T\,\mathbf{x}$ mit $\mathbf{k} = \binom{D}{E}$ und $\mathbf{x} = \binom{x}{y}$

Dieser Term muss auch noch im System der Eigenvektoren angegeben werden.
→ Es ist unsinnig, in zwei Teilen einer Formel zwei verschiedene Koordinatensysteme zu benutzen, in $\mathbf{x'}^T\,\mathbf{M'}\,\mathbf{x'}$ die Eigenvektoren **x'**, und in $\mathbf{k}^T\,\mathbf{x}$ das Ausgangssystem **x**.

Wenn **k** die Koeffizienten von x und y in Q_{Allg} enthält, folgen die Koeffizienten im System der (orthonormierten) Eigenvektoren aus $\mathbf{k'} = \mathbf{R}^T\,\mathbf{k}$.

Formale Verifikation (obwohl vielleicht trivial): $\mathbf{k}^T\,\mathbf{x} \to \mathbf{k'}^T\,\mathbf{x'}$ mit $\mathbf{k'}^T = \binom{D'}{E'}$

Bekannt ist $\mathbf{x} = \mathbf{R}\,\mathbf{x'}$. Damit: $\mathbf{k}^T\,\mathbf{x} = \mathbf{k}^T\,\mathbf{R}\,\mathbf{x'} = (\mathbf{R}^T\,\mathbf{k})^T\,\mathbf{x'}$; also $\mathbf{k'} = \mathbf{R}^T\,\mathbf{k}$

Oder direkt in Komponenten {benutzt wird wieder $\mathbf{x} = \mathbf{R}\,\mathbf{x'}$}:

$\mathbf{x} = \binom{x}{y} \to x = R_{11}\,x' + R_{12}\,y' \wedge y = R_{21}\,x' + R_{22}\,y'$

$$\begin{aligned} D\,x + E\,y &= (D\,R_{11} + E\,R_{21})\,x' + (D\,R_{12} + E\,R_{22})\,y' \\ &= (D\,R^T_{11} + E\,R^T_{12})\,x' + (D\,R^T_{21} + E\,R^T_{22})\,y' \end{aligned}$$

das ist, in Komponenten geschrieben: $\mathbf{R}^T \binom{D}{E} = \begin{pmatrix} D\,R^T_{11} + E\,R^T_{12} \\ D\,R^T_{21} + E\,R^T_{22} \end{pmatrix}$

Der absolute Term F muss nicht transformiert werden.

Q_{Allg} im Ausgangssystem:	$\mathbf{x}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} + \mathbf{k}^T\,\mathbf{x} + F$.
Q_{Allg} im System der Eigenvektoren:	$\mathbf{x'}^T\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{x'} + \mathbf{k'}^T\,\mathbf{x'} + F$.

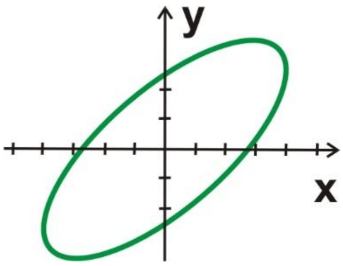
♦ 9.2.1 Anmerkung zur Schreibweise (eventuell trivial, aber für "Einsteiger" nützlich)

Wir haben eindeutig zwischen dem Ausgangssystem **x** und dem Eigenvektoren-System **x'** unterschieden. In der Praxis werden aber oft bei der Angabe von Ergebnissen beides mal dieselben Buchstaben, x und y, benutzt!
Mit der Begründung, "wer solche Rechnungen durchführt, weiß Bescheid", ist dies erlaubt.
Trotzdem ist es interessant, zu untersuchen, "was man dabei wirklich macht"!
Als *konkretes Beispiel* eine gedrehte **Ellipse**. {wie Übungsbeispiel in 7.3}
Im Ausgangssystem 1 Q_{Allg}: $(37/4)\,x^2 + (79/4)\,y^2 - (21/2)\sqrt{3}\,xy - 100 = 0$ {$Q = \mathbf{x}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x}$}
Als Normalform dazu wird angegeben: $4\,x^2 + 25\,y^2 = 100$.
Präziser geschrieben (System 2): $\lambda_1\,x'^2 + \lambda_2\,y'^2 = 100$; $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 25$ {$Q = \mathbf{x'}^T\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{x'}$}
Für eine "einfachere Skizze" ändern wir unseren Blickwinkel und verschieben gedanklich System 2 so, dass es gleich zum System 1 wird. Und dann ändern wir auch die Buchstaben mit, statt x' wieder x und statt y' wieder y. Wenn wir aus verschiedenen Blickwinkeln die Anordnung betrachten, haben wir zweimal dasselbe - eine Ellipse, deren Achsen auch die Symmetrieachsen der Figur sind.

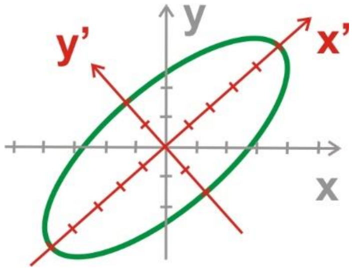
Eventuell beachten: Beide Systeme haben eine orthonormierte Basis.
Die Basisvektoren im System ❶ sind $\mathbf{e}_x = \binom{1}{0}$ und $\mathbf{e}_y = \binom{0}{1}$. {System **x**}
Die Basisvektoren im System ❷ sind analog $\mathbf{e}_{x'} = \binom{1}{0}$ und $\mathbf{e}_{y'} = \binom{0}{1}$ {System **x'**}

Bekannt sind auch die Koordinatendarstellungen von ❷ im System ❶, z.B. $\mathbf{e}_{x'} = \binom{\sqrt{3}/2}{1/2}$

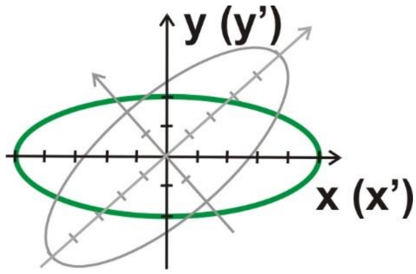
{= Spalte 1 der Matrix **R**}



Ausgangssituation (Q)
Im kartesischen Koordinatensystem liegt eine gedrehte Ellipse vor ❶



Für die gedrehte Ellipse wurde ein Hauptachsensystem errechnet. ❷



Nach gedanklicher Drehung haben wir die "gewohnte Orientierung" ❸

❶ Das Ausgangssystem ist üblicherweise das (orthonormierte) kartesische System
❷ Das Hauptachsensystem ist <u>sicher</u> <u>orthogonal</u>, weil **M** symmetrisch ist. <u>Vorteilhaft</u> für weitere Rechnung ist, wenn es <u>zusätzlich</u> <u>normierte</u> Eigenvektoren enthält.
❸ Das Achsensystem ist dann identisch zum Ausgangssystem, weil beides mal ein orthonormiertes System verwendet wird.

Die Basisvektoren im System ❸ sind dieselben wie im System ❷.
Nur der Blickwinkel wurde geändert.
{Formal so gedreht, dass aus System ❸ System ❶ entsteht.}
Es bleibt bei $\mathbf{e}_{x'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Was wir <u>nicht</u> machen <u>dürfen</u>, ist eine unkritische Gleichsetzung von Zahlenwerten.
- Was wir machen <u>dürfen</u>, ist eine kürzere Rechnung im System 2 durchzuführen und das Ergebnis in das System 1 zu transformieren!

<u>*Beispiel*</u>:
Gesucht sind die Koordinaten der beiden Brennpunkte - und zwar für die gedrehte Ellipse!
Die Lösung ist einfach - aber nur in der Normallage und diese entspricht unserem System 2!
$\mathbf{F}(\pm e \mid 0)$ mit $e^2 = a^2 - b^2$; $\mathbf{F}(\pm\sqrt{21} \mid 0)$
Der Zusammenhang zwischen **x'** und **x** ist mit der Matrix der Eigenvektoren **R** bekannt.
$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; es gilt $\mathbf{x} = \mathbf{R}\,\mathbf{x}'$
$\mathbf{F_1}$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{21} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}97 \\ 2{,}29 \end{pmatrix}$; $\mathbf{F_2}$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{21} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3{,}97 \\ -2{,}29 \end{pmatrix}$;
{Natürlich liegen auch diese Koordinaten symmetrisch zum Ursprung, der durch die Drehung nicht verändert wird. Eine direkte Rechnung im System 1 wäre umständlicher.}

Wenn in der Ausgangsituation eine **Drehung <u>und</u> eine Verschiebung** vorliegt, ist trivialer System ❶ dasselbe, wenn wir nur die Basisvektoren betrachten. Aber auch System ❷ ist dasselbe, mit denselben Basisvektoren $\mathbf{e}_{x'}$ und $\mathbf{e}_{y'}$. Die hier benutzte Hauptachsentransformation entspricht nur einer geeigneten Drehung, um die einfache Beschreibung ohne einen gemischten Term "xy" zu erreichen. Nur bei der Umrechnung von Koordinaten eines Punkts ist dann zusätzlich die Ursprungsverschiebung mit zu berücksichtigen. Der Ursprung ist im System ❷ immer noch $\mathbf{O}(0 \mid 0)$. Aber im System ❶ ist der Ursprung gleich der Verschiebung, $\mathbf{O}(x_o \mid y_o)$.

x[in ❶] = **x'**[umgerechnet von ❷ auf ❶] + **o**[in ❶]

{In 7.6.3 wird dies nochmals grafisch erklärt}

♦ 9.2.2 Anmerkung zur Mehrdeutigkeit

Die **Eigenwerte** λ_1 und λ_2 können **vertauscht** werden. Dann tauschen die Einträge in $\mathbf{\Lambda}$ den Platz und die Spalten in **R** werden vertauscht.

Aber aus $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ wird dann auch $\lambda_2 x'^2 + \lambda_1 y'^2$. Die Achsen sind vertauscht!

Eine *Ellipse* wäre dann um 90° gedreht, wenn die alten Bezeichnungen der Koordinaten beibehalten werden. Üblicherweise wählen wir unter beiden Möglichkeiten diejenige aus, bei der die längere Achse in der x-Achse des Koordinatensystems liegt.
Offenkundig ist dies keine mathematische Notwendigkeit, sondern eine übliche Konvention!

Bei einer *Parabel* sind diese beiden Möglichkeiten wohlbekannt und mit den verschiedenen Bezeichnungen "Normallage" und "Standardlage" bezeichnet.
Auch hier ist es nur eine Frage der Konvention, welche Lage man verwenden will.

Wenn **Drehwinkel** angegeben werden sollen, besteht zum einen offenkundig eine Mehrdeutigkeit, wenn x und y vertauscht werden. Wenn eine Parabel, ausgehend von der Normallage, um 120° gedreht werden muss, um die Endsituation in Q zu erhalten, dann muss sie, ausgehend von der Standardlage, nur um 30° gedreht werden.

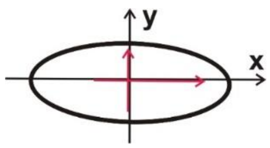
Zusätzlich ist eine Mehrdeutigkeit möglich, die mit der Gleichung des Objekts zusammenhängt. Beispiel: Ist ein Unterschied erkennbar, wenn ausgehend von der Normallage eine Ellipse um 30° bzw. um 210° gedreht wird? Für den einzelnen Punkt sicher! Für die gesamte Figur und damit für die Koordinatengleichung nicht! Die Punkte tauschen jeweils den Platz, aber für jeden Punkt besteht dieselbe Koordinatengleichung!

{Diese Mehrdeutigkeiten werden auch nochmals in den konkreten Beispielen, Kapitel 7.7 und 7.8, gezeigt.}

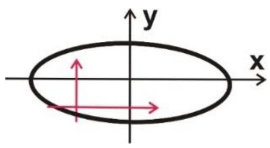
9.3 Anschauliche Erklärung zu Transformationen

Am Beispiel der Ellipse lässt sich der Zweck der Hauptachsentransformation schön zeigen. Wenn wir eine Ellipse nicht nur zeichnen, sondern auch mit Zahlen (Koordinaten) beschreiben wollen, brauchen wir ein Achsensystem.

{Schwarz = übergeordnetes kartesisches Achsensystem, rot = Hauptachsensystem der Ellipse}



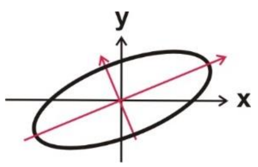
Intuitiv wählen wir dieses System



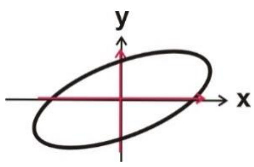
... und nicht dieses!

Mathematisch begründen wir, dass damit eine einfache quadratische Form möglich ist,
el: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ Anschaulich erscheint uns dies am sinnvollsten, weil damit die vorhandenen Symmetrien in der Ellipse berücksichtigt sind.

♦ **Drehen** wir die Ellipse, dann



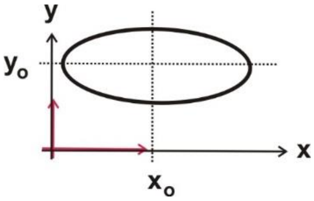
ist dies sinnvoll, weil damit auch in der gedrehten Form die Symmetrien erhalten bleiben {**A**},



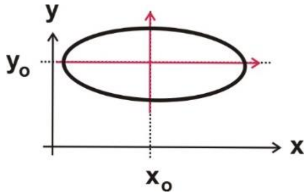
... und dies nicht, weil hier die Hauptachsen nicht mehr die Symmetrie berücksichtigen {**B**}.

Mathematisch sehen wir, dass in der Form **B** eine Gleichung auch einen gemischten Term "xy" enthält. Das erschwert weitere Rechnungen!

♦ Welche Situation ist bei einer **Translation** möglich? Dass die Hauptachsen auf jeden Fall parallel zu den Symmetrieachsen der Ellipse liegen sollen, wissen wir schon!



Richtig: Die Hauptachsen liegen parallel zu den Symmetrieachsen {**A**}.



"Richtig": Die Hauptachsen sind jetzt auch wieder Symmetrieachsen {**B**}.

Bei **A** berücksichtigen wir die Verschiebung in der Formel el: $b^2 (x - x_o)^2 + a^2 (y - y_o)^2 = a^2 b^2$. Die Verschiebung ist direkt in der Skizze und in der Formel erkennbar.

Bei **B** ist el: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Hier richten wir unser Augenmerk auf das Objekt. Es liegt eine Ellipse vor, deren Normallage durch die Formel beschrieben wird. Die Verschiebung müssen wir durch eine Zusatzangabe "Ursprung verschoben nach ..." spezifizieren.
Bei konkreten Rechnungen mit Koordinaten müssen wir das zusätzlich berücksichtigen! Für konkrete Rechnungen ist **A** also deutlich sinnvoller!

B macht nur Sinn, wenn eine Quadrik vorliegt und man nicht weiß, welches Objekt (Ellipse, Parabel oder Hyperbel) damit beschrieben wird. Dann würde **B** spezifizieren, welche Art von Objekt durch Q beschrieben wird.

♦ Im allgemeinen Fall ist die Ellipse **verschoben und gedreht**.

Unsere bekannte Formel für die Drehung $\mathbf{x'} = \mathbf{R}\,\mathbf{x}$ beschreibt die Drehung um einen Fixpunkt, die Translation wird durch Addition der Verschiebung berücksichtigt. Am einfachsten ist für eine "Vorwärtsrechnung Normallage → gedreht, verschoben", wenn der Fixpunkt der Ursprung des Koordinatensystems ist. Daher ist die sinnvolle Reihenfolge zuerst Drehung, dann Verschiebung. {Sonst müsste man die Formel für die Drehung um einen bestimmten Fixpunkt anwenden.}

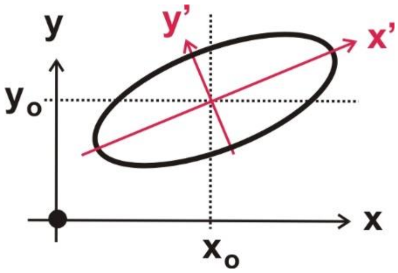
♦ Was geschieht bei unserem **Verfahren der Hauptachsentransformation** über Eigenwerte/Eigenvektoren?

Im ersten Schritt wird eine Transformation gesucht, so dass aus $Q_{Teil} = \mathbf{x}^T \mathbf{M}\,\mathbf{x} \rightarrow$ $Q'_{Teil} = \mathbf{x'}^T \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{x'}$ entsteht. {Damit ist ein gemischter Term in "xy" eliminiert.} **x** (in Q) ist im Ausgangssystem beschrieben {genauer: die Koordinatendarstellung des Vektors **x**}, **x'** im System der Eigenvektoren. Wie **x** und **x'** zusammenhängen, ist aus den Eigenvektoren bekannt. Spaltenweise nebeneinander angeordnet, ist dies die Matrix **R**, und es gilt $\mathbf{x} = \mathbf{R}\,\mathbf{x'}$. {Das gilt auch, wenn **R** eine Drehspiegelung beschreibt.}

Bekannt ist jetzt das Hauptachsensystem.

Noch nicht bekannt ist die Verschiebung (x_o, y_o).

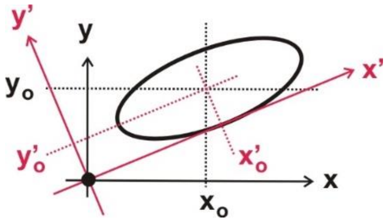
Die Grafik *scheint* die Verhältnisse "gut für eine weitere Rechnung" darzustellen. {Grafik "Ausgangssituation"}



Bekannt ist auch das Prinzip, wie eine Verschiebung rechnerisch bestimmt werden kann: Ein Ausdruck $x^2 \pm t\,x$ wird durch "quadratische Ergänzung" in einen Ausdruck $(x \pm x_o)^2$ umgeformt.

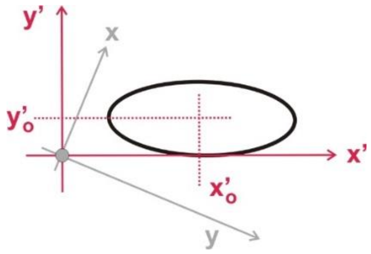
Wichtig ist, dass **x** = **R x'** eine Drehung (oder Drehspiegelung) enthält und keine Verschiebung. Der Fixpunkt für die Drehung (oder Drehspiegelung) ist dann der Ursprung des Koordinatensystems!

Tatsächlich haben wir {Grafik "Ergebnis"}:
Zu beachten:
Die quadratische Ergänzung wird im Hauptachsensystem durchgeführt, man erhält nicht x_o und y_o, sondern x_o' und y_o'!



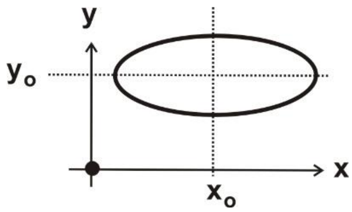
Als Ergebnis ist $Q' = \lambda_1 (x' - x'_o)^2 + \lambda_2 (y' - y'_o)^2 - \lambda_1 \lambda_2$ eine "schöne" Endformel.
{Mit der üblichen "Sorglosigkeit" wird dies oft als Q: $= \lambda_1 (x - x_o)^2 + \lambda_2 (y - y_o)^2 - \lambda_1 \lambda_2$ geschrieben.}
Die Ellipse ist im Hauptachsensystem nicht mehr gedreht.

Ein letzter Schritt ist eher "Konvention".
Man dreht die Gesamtanordnung gedanklich so, dass die "gewohnte" Orientierung von x'- und y'-Achse vorliegt.
Dafür wird also nicht mehr gerechnet, sondern nur "das Papier mit der Grafik gedreht".



Falls gewünscht, können x_o und y_o durch Transformation berechnet werden.

Damit beschreibt {Grafik "Alternative"}
$Q = \lambda_1 (x - x_o)^2 + \lambda_2 (y - y_o)^2 - \lambda_1 \lambda_2$
mit den richtigen Werten x_o und y_o die Ellipse, allerdings <u>nicht</u> gedreht
- im Ausgangs-Koordinatensystem.



<u>*Kurzfassung*</u> des später (Kapitel10.2.2) ausführlicher dargestellten <u>*Beispiels*</u>

$Q = 59 x^2 - 24 xy + 66 y^2 - 448 x - 36 y + 764 = 0$ {im kartesischen Ausgangssystem}
{Ohne die eingezeichneten (roten) Hauptachsen gilt dafür Grafik "Ausgangssituation".}
Eigenwerte: $\lambda_1 = 50$; $\lambda_2 = 75$
Matrix der normierten Eigenvektoren: $\mathbf{R} = (1/5) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Transformation des linearen Terms, $\mathbf{R^T k} = \begin{pmatrix} -380 \\ 240 \end{pmatrix}$
Jetzt ist alles im System der Eigenvektoren bekannt:

$Q' = 50 x'^2 + 75 y'^2 - 380 x' + 240 y' + 764 = 0$ {Dafür gilt die Grafik "Ergebnis"}
Quadratische Ergänzung, um die Verschiebung des Ursprungs zu sehen.
Nach Kürzen (Division durch 25):
$Q' = 2 (x' - 3{,}8)^2 + 3 (y' + 1{,}6)^2 - 6 = 0$ {Mittelpunkt **P**$(x'_o \mid y'_o)$ = **P**$(3{,}8 \mid -1{,}6)$}
Wenn man eine Grafik zu diesem Q' erstellt, entsteht die unter "Konvention" genannte Anordnung.
Verschiebung, Umrechnung in das System {x,y}: **P**$(x_o \mid y_o)$ = **P**$(4 \mid 1)$}
$Q = 2 (x - 4)^2 + 3 (x - 1)^2 = 6$ beschreibt im Ausgangssystem eine (nicht gedrehte) Ellipse mit der richtigen Verschiebung. {Dafür gilt die Grafik "Alternative"}