Kegelschnitte - Teil 10

10.1 Umkehrung der Rotation - mit dem Matrixformalismus

10.1.1 Beispiel gedrehte Ellipse.

Gegeben Q: $(37/4)\,x^2 - (21/2)\,\sqrt{3}\,xy + (79/4)\,y^2 - 100 = 0$

In Kapitel 8.2.2 über Koeffizientenvergleich gelöst: $\{a^2; b^2\} = \{25; 4\}$ und $\varphi = 30°$

Ausgangspunkt $Q = A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2$ und $Q = \mathbf{x}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} = (x\ y)\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Gesucht sind die Eigenwerte / Eigenvektoren

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 37/4 & -21\sqrt{3}/4 \\ -21\sqrt{3}/4 & 79/4 \end{pmatrix}$;

Spur($\mathbf{M}$) = 29; det($\mathbf{M}$) = 100

charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - \lambda\cdot\text{Spur}(M) + \det(M) = \lambda^2 - 29\,\lambda + 100 = 0$

♦ Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 29/2 \pm [841/4 - 100]^{1/2} = \{4; 25\}$; $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

➔ Wenn nur die Normalform gefragt ist, sind wir damit schon fertig:
el: $4\,x^2 + 25\,y^2 = 100$.
{Eine Ellipse, weil A' und C' bzw. λ_1 und λ_2 der Diagonalform $\mathbf{\Lambda} > 0$}

♦ Eigenvektoren:

$\lambda = 4$ $\quad (37/4 - 4)\,x - (21/4)\,\sqrt{3}\,y = 0 \rightarrow x - \sqrt{3}\,y = 0$
{Zweite Zeile unnötig, weil ein homogenes Gleichungssystem}
Homogenes Gleichungssystem: Sei (Parameter) $y = 1 \rightarrow x = \sqrt{3}$

$\lambda = 25$ $\quad (37/4 - 25)\,x - (21/4)\,\sqrt{3}\,y = 0 \rightarrow -3\,x - \sqrt{3}\,y = 0$
Sei $y = 1 \rightarrow x = -1/\sqrt{3}$

$\mathbf{x_1}$; $\mathbf{x_2}$: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ sind orthogonal {wie für Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix gefordert}

Normiert: $\mathbf{x_1}\ \{\cdot\ 1/2\} \rightarrow \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x_2}\ \{\cdot\ \sqrt{3}/2\} \rightarrow \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; **R** hat die Struktur einer Drehmatrix und als Kontrolle det(**R**) = 1.

$\varphi = 30°$ $\{\cos(30°) = \sqrt{3}/2;\ \sin(30°) = 1/2\}$

Normalform: $4\,x^2 + 25\,y^2 = 100$

Das Verfahren "Ausgangsform → Normalform" ist damit (fast) vollständig behandelt. Es fehlt nur noch der (triviale) Hinweis, dass eine Vertauschung der Eigenwerte λ auch eine Vertauschung in $\lambda_1\,x^2 + \lambda_2\,y^2$ bewirkt.

Obwohl es nicht zwingend zur Problematik "Hauptachsentransformation" gehört, ist interessant, wie sich die Mehrdeutigkeit in der Wahl der Eigenvektoren auswirkt, wenn der geometrische Zusammenhang zwischen der Ausgangsform (in Q) und der Hauptachsenform dazu (Normallage) untersucht wird. Von Bedeutung ist dies nur, wenn nicht nur die Grafik und die Koordinatengleichung der Hauptachsenform gefragt sind, sondern auch die tatsächliche Lage der Hauptachsen.

{Hinweis: Für die Hyperbel gilt prinzipiell dasselbe wie für die Ellipse. Für jede mögliche Wahl der Einheitsvektoren gibt es eine Transformation, die aus einer Normalform die Lage in Q erzeugt. Bei der Parabel gibt es einen Unterschied. Dort ist je nach Wahl der Eigenvektoren eine Normal- bzw. Standardlage mit unterschiedlicher Öffnung (links/rechts bzw. oben/unten) zu verwenden.}

10.1.2 Mehrdeutigkeit - am Beispiel der gedrehten Ellipse

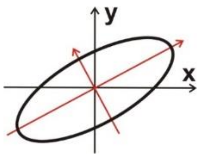
Vorbemerkung zur Nomenklatur

Zur Wahrung der Übersichtlichkeit wird verwendet:

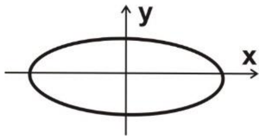
- **R** Matrix der Eigenvektoren
- **D**(φ) Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$;
- **S**(φ) Drehspiegelungsmatrix $\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$
- φ gibt jeweils an, wie eine Normalform gedreht werden muss, um die Ausgangsform zu erhalten.

Am Beispiel dieser Ellipse soll anschaulich gezeigt werden, wie eine Vertauschung der Eigenwerte und verschiedene Möglichkeiten für die Eigenvektoren sich auswirken.

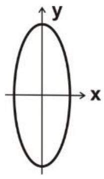
1. Eine Vertauschung der Eigenwerte (und damit auch der Spalten in **R**) führt zur alternativen Normalform el: $25\,x^2 + 4\,y^2 = 100$. Dies ist die weniger übliche Form mit der größeren Achse in y-Richtung des Koordinatensystems.



Ausgangsform
gedrehte Ellipse
Gleichung Q



Normalform 1
$4\,x^2 + 25\,y^2 = 100$
{üblich, a > b}



Normalform 2
$25\,x^2 + 4\,y^2 = 100$
{weniger üblich, a < b}

2. Matrix der Eigenvektoren bei Vertauschung der Eigenwerte

Für die Normalform 1: $\mathbf{R}_{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; dafür schon bekannt $\mathbf{R}_{(1)} = \mathbf{D}(+30°)$.

Für die Normalform 2: $\mathbf{R}_{(2)} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; ein Vergleich zeigt, dass $\mathbf{R}_{(2)} = \mathbf{S}(+60°)$

$\mathbf{R}_{(2)}$ hat nicht mehr die Struktur einer Drehmatrix; ebenso ist det($\mathbf{R}_{(2)}$) = -1. Transformationen sind immer noch möglich, weil der Formalismus an keiner Stelle eine Drehmatrix fordert, sondern nur eine orthogonale Matrix, um $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ anwenden zu können. Die Ähnlichkeitstransformation $\mathbf{M} = \mathbf{R}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{R}^T$ (Umkehrung von "Ausgangsform → Normalform") erzeugt **M** - also dieselbe Quadrik Q (und die identische Grafik). {Weiteres zu **S**(+60°) in 5.!}

3. Änderung des Vorzeichens in $\mathbf{R}_{(1)}$

$\mathbf{R}_{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{R}_{(11)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ für $\mathbf{v}_1 \rightarrow -\mathbf{v}_1$

$\mathbf{R}_{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{R}_{(12)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & +1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ für $\mathbf{v}_2 \rightarrow -\mathbf{v}_2$

In beiden Fällen ist det(**R**) = -1; es liegen Drehspiegelungsmatrizen **S** vor.

$\mathbf{R}_{(11)} = \mathbf{S}(+15°)$, $\mathbf{R}_{(12)} = \mathbf{S}(-75°)$. Beides mal $\mathbf{M} = \mathbf{R}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{R}^T$.

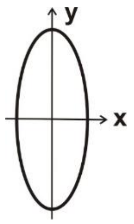
4. Änderung des Vorzeichens in $\mathbf{R}_{(2)}$

$\mathbf{R}_{(2)} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \to \mathbf{R}_{(21)} = \begin{pmatrix} +1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ für $\mathbf{v_1} \to \mathbf{-v_1}$

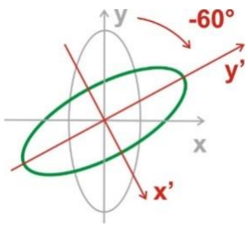
$\mathbf{R}_{(2)} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \to \mathbf{R}_{(22)} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ für $\mathbf{v_2} \to \mathbf{-v_2}$

Beides mal Drehmatrizen, $\mathbf{R}_{(21)} = \mathbf{D}(-60°)$; $\mathbf{R}_{(22)} = \mathbf{D}(+120°)$

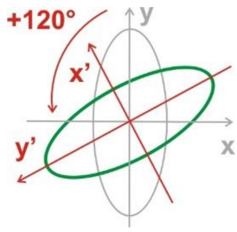
Die Drehung aus der Normallage 2 liefert jeweils gleiches Q und gleiche Grafik, wenn nur die Ellipse betrachtet wird. Die Richtung der Achsen ist aber umgekehrt! In Q spielt das sicher in x^2 und y^2 sicher keine Rolle, aber auch im gemischten Glied "xy" heben sich die beiden Vorzeichenänderungen auf! Ein bestimmter Punkt hätte aber nach den Drehungen verschiedene Koordinaten. Die in der Ellipse vorhandene Symmetrie verhindert, dass das bei "Betrachten des Ergebnisses" das visuell erkennbar ist. Die Mehrdeutigkeit in der Wahl der Matrix bedeutet demnach, dass verschieden aussehende Matrizen zum gleichen Resultat bei der Transformation führen.



Normalform 2



Drehung um - 60°



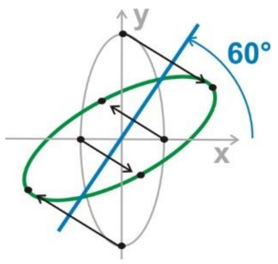
Drehung um + 120°

5. Drehspiegelung und $\mathbf{R}_{(2)}$

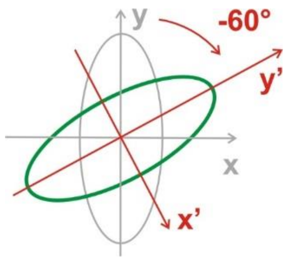
$\mathbf{R}_{(2)} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ hat die Struktur einer Drehspiegelungsmatrix $\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$

$\arccos(-1/2) = 120°$ und $\arcsin(\sqrt{3}/2) = 60°$ oder $120° \to 2\,\varphi = 120°$

Die Drehspiegelungsmatrix $\mathbf{S}(60°)$ bedeutet eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden mit dem Steigungswinkel 60°.



Spiegelung an einer Ursprungsgeraden mit dem Steigungswinkel + 60°, $\mathbf{S}(+60°)$



Die Skizze legt nahe, dass äquivalent dazu eine Drehung erfolgen kann, $\mathbf{D}(-60°)$

Alle Punkte würden an derselben Stelle wie bei der Drehung um -60° liegen, wenn zusätzlich anschließend an einer Ursprungsgeraden mit Steigungswinkel 30° gespiegelt wird. {$\mathbf{S}(+30°)$}
Entweder $\mathbf{S}(+30°)\,\mathbf{S}(+60°) = \mathbf{D}(-60°)$ oder $\mathbf{S}(+30)\,\mathbf{D}(-60) = \mathbf{S}(+60)$
{Wer einen Tippfehler vermutet, soll beachten, dass auch $\mathbf{S}(\varphi)^{-1} = \mathbf{S}(\varphi)^{\mathbf{T}} = \mathbf{S}(\varphi)$!}
Wenn <u>nur</u> Q (und damit auch die Grafik) betrachtet wird, führt die Drehspiegelung $\mathbf{S}(60°)$ zum gleichen Resultat wie eine Drehung $\mathbf{D}(-60°)$.

Dies legt den allgemeinen Zusammenhang nahe, dass **S**(φ) und **D**(-φ) zum gleichen Resultat in Q (und der Grafik) führen. Das bedeutet natürlich nicht, dass die Matrizen **S**(φ) und **D**(-φ) gleich sind!

Allgemein: **S**(φ) = **S**(φ/2) **D**(-φ)

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) & 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) & \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \checkmark$$

6. Fazit

2 Normalformen durch Vertauschung der Eigenwerte und mehrere Möglichkeiten für die Transformationsmatrix **R** durch Vertauschung der Spalten und Vorzeichenänderung. Stets ist **R** aber orthogonal und beschreibt Drehungen oder Drehspiegelungen.

Trigonometrische Funktionen sind nicht eindeutig mit einem Winkel verknüpft, eindeutig ist aber die Lage der Ausgangsform Q in einem Achsensystem. Im Regelfall ist die Mehrdeutigkeit im Drehwinkel unwichtig, weil nur interessiert, welche Normalform zu einem gegebenen Q vorliegt.

Bei der Ellipse kann bei jeder Wahl der Einheitsvektoren durch eine Drehung oder Drehspiegelung wieder die Ausgangs-Form Q erzeugt werden.

10.1.3 Beispiel gedrehte Parabel

Gegeben Q: $(3/4)\,x^2 - (\sqrt{3}/2)\,x\,y + (1/4)\,y^2 - 2\,x - 2\sqrt{3}\,y = 0$

In Kapitel 7.4.2 über Koeffizientenvergleich gelöst: par: $y^2 = 4\,x$; $\varphi = 60°$

$Q_{Allgemein}$: $A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$

$Q_{Teil} = A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2$ und $Q_{Teil} = \mathbf{x}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x} = (x\;y)\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\mathbf{M} = (1/4)\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$; Spur(**M**) = 1; det(**M**) = 0

charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - \lambda\cdot\text{Spur}(M) + \det(M) = \lambda^2 - \lambda = 0$

- Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \{0; 1\}$
  Ein Eigenwert = 0 ist das Kennzeichen für eine Parabel!
- Eigenvektoren:

$\lambda = 0$ $(3/4 - 0)\,x - \sqrt{3}/4\,y = 0 \rightarrow 3\,x - \sqrt{3}\,y = 0$
Homogenes Gleichungssystem: Sei (Parameter) $y = 1 \rightarrow x = 1/\sqrt{3}$

$\lambda = 1$ $(3/4 - 1)\,x - \sqrt{3}/4\,y = 0 \rightarrow -x - \sqrt{3}\,y = 0$; Sei $y = 1 \rightarrow x = -\sqrt{3}$

$\mathbf{x}_1$; $\mathbf{x}_2$: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; Normierung: $\mathbf{v}_1$; $\mathbf{v}_2$: $\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Die Matrix $\mathbf{R} = (\mathbf{v}_1\;\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ist orthogonal und hat die Struktur einer Rotationsmatrix zu $\varphi = 60°$.

Transformation der linearen Koeffizienten: $\mathbf{R}^T\begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zusammenfassung: $0 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + (-4) \cdot x + 0 \cdot y = 0 \rightarrow y^2 - 4\,x = 0$

→ **Normallage** par: $y^2 = 4\,x$

Vertauscht man die Eigenwerte / Eigenvektoren, $\lambda_{1,2} = \{1; 0\}$

$\mathbf{R} = (1/2)\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ {Matrix für eine Drehspiegelung}

lineare Koeffizienten: $\mathbf{R}^T\begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; Damit: $x^2 - 4\,y = 0$

→ **Standardlage** par: $y = (1/4)\,x^2$

10.1.4 Mehrdeutigkeit (Parabel)

Zur Ausgangsform Q kann als Ergebnis der Hauptachsentransformation die Normallage oder die Standardlage entstehen. Von Interesse kann nun sein, ob aus diesen beiden Lagen wieder die Ausgangslage (in Q) erreicht werden kann, auch wenn in **R** Spaltenvertauschung oder Vorzeichenänderungen durchgeführt werden. Bei der Ellipse war dies so!

Wenn wir nur eine Grafik betrachten und das Achsensystem nicht einzeichnen, ist eine Parabel "$y^2 = 2\,p\,x$" nach rechts offen. Wenn wir anstatt des üblichen rechtshändigen Koordinatensystems ein linkshändiges wählen, also die x-Achse in die Gegenrichtung wählen, ist die Parabel nach links offen - wenn wir nur die Grafik (Zeichnung auf dem Papier) betrachten. In diesem Sinne erzeugt die Vorzeichenänderung einer Achse etwas Verschiedenes. {Im rechtshändigen System müssten wird dann fordern, dass $x \le 0$ sein muss.} Bei der Ellipse und Hyperbel spielt eine solche Vorzeichenänderung wegen "$x^2 \pm y^2$" keine Rolle!

Ausgangsform Q: $(3/4)\,x^2 - (\sqrt{3}\,/2)\,x\,y + (1/4)\,y^2 - 2\,x - 2\,\sqrt{3}\,y = 0$
{"Normales" rechtshändiges, kartesisches Koordinatensystem}

$\mathbf{R} = (\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}) = (1/2)\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$; $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\mathbf{\Lambda_2} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

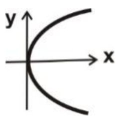
Koordinaten: Ausgangsform $\mathbf{x}$, Hauptachsenform $\mathbf{x'}$; $\mathbf{x} = \mathbf{R}\,\mathbf{x'}$
Jeweils Transformation von $\mathbf{x'}^T\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{x'} + \mathbf{k'}\,\mathbf{x'}$
$\mathbf{D}(\varphi)$ Drehmatrix, $\mathbf{S}(\varphi)$ Drehspiegelungsmatrix
Wird durch Transformation mit **R** wieder die Ausgangsform Q erzeugt?

$\mathbf{R_{(1)}} = \mathbf{R}$; $\mathbf{\Lambda}$ $\to$ $\mathbf{D}(+60°)$ erzeugt Q ✓
$\mathbf{R_{(11)}} = \mathbf{R}$ mit $-\mathbf{v_1}$; $\mathbf{\Lambda}$ $\to$ $\mathbf{S}(-60°)$ - Vorzeichen $\mathbf{v_1}$ - erzeugt Q_2 ✗
$\mathbf{R_{(12)}} = \mathbf{R}$ mit $-\mathbf{v_2}$; $\mathbf{\Lambda}$ $\to$ $\mathbf{S}(+30°)$ - Vorzeichen $\mathbf{v_2}$ - erzeugt Q ✓

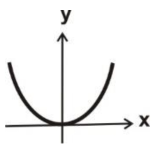
$\mathbf{R_{(2)}} = \mathbf{R}$; $\mathbf{\Lambda_2}$ $\to$ $\mathbf{S}(+75°)$ - Vertauschung λ - erzeugt Q ✓
$\mathbf{R_{(21)}} = \mathbf{R}$ mit $-\mathbf{v_1}$; $\mathbf{\Lambda_2}$ $\to$ $\mathbf{D}(-30°)$ - Vertauschung λ, Vorzeichen $\mathbf{v_1}$ - erzeugt Q ✓
$\mathbf{R_{(22)}} = \mathbf{R}$ mit $-\mathbf{v_2}$; $\mathbf{\Lambda_2}$ $\to$ $\mathbf{S}(-75°)$ - Vertauschung λ, Vorzeichen $\mathbf{v_2}$ - erzeugt Q_2 ✗

Q_2: $(3/4)\,x^2 - (\sqrt{3}\,/2)\,x\,y + (1/4)\,y^2 + 2\,x + 2\,\sqrt{3}\,y = 0$

Unterschiedliche Lage der Hauptachse (Normallage, Standardlage)

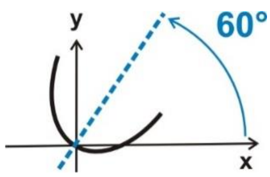


Normallage $\{\Lambda\}$
Parabelachse = x-Achse

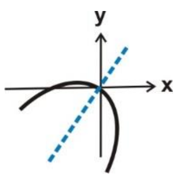


Standardlage $\{\Lambda_2\}$
Parabelachse = y-Achse

Grafiken der hier vorkommenden Quadriken Q und Q_2.
{Q_2 entsteht aus Q durch eine Spiegelung an einer Geraden mit Steigung -45°}

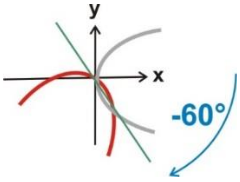


Q im Ausgangsachsensystem

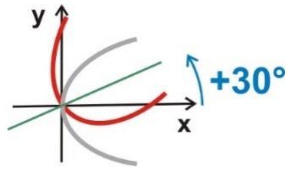


Q_2 im Ausgangsachsensystem

Grafischer Vergleich der Transformations-Ergebnisse:
Mit $\mathbf{R}_{11}$: Normallage gespiegelt an einer Geraden mit Steigungswinkel -60°
Mit $\mathbf{R}_{12}$: Normallage gespiegelt an einer Geraden mit Steigungswinkel +30°



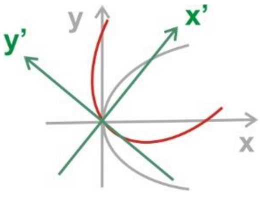
Transformation mit $\mathbf{R}_{11}$ {**S**(-60°)}



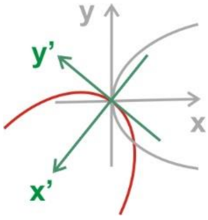
Transformation mit $\mathbf{R}_{12}$ {**S**(+30°)}

In der Normalform par: $y^2 = 2\,p\,x$ kommt x linear vor (und y quadratisch). Eine Umkehrung der Richtung einer Achse wirkt sich nur für x aus. Falls nur die Vorzeichenvertauschung für die y'-Achse, also $\mathbf{v}_2$, vorliegt, ändert sich das Transformationsergebnis nicht. $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{R}_{12}$ (mit der Vorzeichenvertauschung in $\mathbf{v}_2$) transformieren beide nach Q.

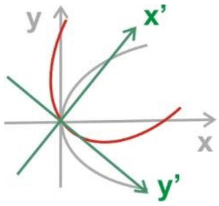
Dies ist noch deutlicher in der Transformation erkennbar, wenn die Hauptachsen gezeichnet werden. {Achsen x', y' entlang den Spaltenvektoren $\mathbf{v}_1$**,** $\mathbf{v}_2$ von **R**}



$\mathbf{R}_1$ {**D**(+60°)}



$\mathbf{R}_{11}$ {**S**(-60°)}



$\mathbf{R}_{12}$ {**S**(+30°)}

Jeweils ist x' auch die Symmetrieachse der Parabel!
{Durch die Vorzeichenvertauschung eines **v** entstehen aus rechtshändigen Koordinatensystemen linkshändige.}

Transformation aus der Standardlage
In der Standardlage par: $y = a\,x^2$ kommt y linear vor. Bei einer Transformation aus dieser Lage erwarten wir, dass eine Änderung in x' (also Vorzeichenvertauschung in $\mathbf{v}_1$) sich nicht auswirkt, aber die Änderung in y' (also Vorzeichenvertauschung in $\mathbf{v}_2$). $\mathbf{R}_{21}$ erzeugt dieselbe Öffnungsrichtung der Parabel wie $\mathbf{R}_1$ (Q), $\mathbf{R}_{22}$ erzeugt die Gegenrichtung Q_2.

Ergänzung
Eine Vorzeichenänderung wirkt sich ebenso bei der Hauptachsentransformation aus.

Vorher haben wir mit $\lambda_{1,2} = \{1; 0\}$ und $\mathbf{R} = (1/2)\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ die Standardlage par: $y = (1/4)\,x^2$ erhalten.

Eine Vorzeichenänderung von $\mathbf{v}_i$ liefert natürlich auch ein erlaubtes System von Hauptachsen.

Mit $-\mathbf{v}_2$: $\mathbf{R} = (1/2)\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ {Drehmatrix D(150°)}

$\rightarrow \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow x^2 + 4\,y = 0 \rightarrow y = -\,(1/4)\,x^2$ (nach unten offen)

Auch dies erfüllt alle Forderungen an eine Hauptachsenform. Der wesentliche Grund, die Elimination des gemischten Terms "xy" erfolgt ebenso. Es ist nur eine "vielleicht ungewohnte" Orientierung! {Während Ellipse und Hyperbel zwei Symmetrieachsen haben, hat die Parabel nur eine.}

Wenn wir diese nach unten offene Parabel benutzen, erhalten wir dort Q, wo wir vorher Q_2 erhalten haben. Für die Rücktransformation ist auch die Hauptachsenform mit der passenden Öffnungsrichtung einzusetzen.

10.2 Kombination

Eine vollständige Diskussion aller möglichen Fälle - also auch der Sonderfälle Punkt, zwei Geraden usw. wird nicht mehr durchgeführt. Hier geht es nur um die Kegelschnitte Ellipse, Hyperbel, Parabel.

Die **Kombination** aus **Translation** und **Rotation** ist prinzipiell nichts Neues.

- Zu beachten ist die Reihenfolge für eine Rechnung "Normalform → gedreht, verschoben". Weil eine Drehung um einen Fixpunkt erfolgt, ist bei einer Berechnung von Q zuerst die Drehung, dann die Translation zu berechnen.
- Bei der Umkehrung "gedreht, verschoben → Normalform" ist ein Weg über Eigenwert / Eigenvektor üblich.
  Allgemeine Quadrik $\mathbf{x}^T \mathbf{M}\, \mathbf{x} + \mathbf{k}\, \mathbf{x} + F = 0$; mit Eigenvektoren $\mathbf{x'}^T \mathbf{\Lambda}\, \mathbf{x'} + \mathbf{k'}\, \mathbf{x'} + F = 0$
  Der lineare Term $\mathbf{k'}\, \mathbf{x'}$ kann durch eine quadratische Ergänzung eliminiert werden.

10.2.1 Beispiel für "Normalform → gedreht, verschoben".

Normalform: el: $4\, x^2 + 25\, y^2 = 100$
gedreht Q: $(37/4)\, x^2 + (79/4)\, y^2 - (21/2)\sqrt{3}\, xy - 100 = 0$
Zusätzlich Verschiebung: **O**(0 | 0) →**O'**(3 | 7)
Jeweils Einsetzen x = x' - 3 und y' = y - 7. Q': $(37/4)\,(x - 3)^2 + \ldots$
Am Ende (übliches) Umbenennen x' in x und y' in y.
$Q' = (37/4)\, x^2 - (21/2)\sqrt{3}\, xy + (79/4)\, y^2 + [147\sqrt{3} - 111] / 2\, x + [63\sqrt{3} - 553]/2\, y$
$\quad + (951 - 441\sqrt{3}/2)$
Der Ausdruck entspricht jetzt der allgemeinen Quadrik $A\, x^2 + B\, x\, y + C\, y^2 + D\, x + E\, y + F$

♦ **Umkehrung** "gedreht, verschoben → Normalform"

10.2.2 Beispiel 1: Ellipse (gedreht und verschoben)

$Q = 59\, x^2 - 24\, xy + 66\, y^2 - 448\, x - 36\, y + 764 = 0$ {im kartesischen Ausgangssystem}
$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 59 & -12 \\ -12 & 66 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 50;\ \lambda_2 = 75$
normierte Eigenvektoren: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{R} = (1/5) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
Transformation des linearen Terms, $\mathbf{R}^T\, \mathbf{k}$: $(1/5) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -448 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -380 \\ 240 \end{pmatrix}$
Damit Q' (im System der Eigenvektoren!) $Q' = 50\, x^2 + 75\, y^2 - 380\, x + 240\, y + 764 = 0$
Zur "Vereinfachung" die quadratische Ergänzung.
$50\, [x^2 - (380/50)\, x + 380^2/100^2] - 50 \cdot 380^2/100^2 = 50\, [x - 3{,}8]^2 - 722$
analog $75\, [y + 1{,}6]^2 - 192$
$Q' = 50\, [x - 3{,}8]^2 + 75\, [y + 1{,}6]^2 - 150 = 0$ und gekürzt
$Q' = 2\, [x - 3{,}8]^2 + 3\, [y + 1{,}6]^2 - 6 = 0$
Das ist eine Ellipse mit $a^2 = 3$, $b^2 = 2$ um den Mittelpunkt **P**(3,8 | -1,6)
det(**R**) = +1, also eine orthogonale Drehmatrix; $\cos(\varphi) = 4/5 \rightarrow \varphi \approx 36{,}87°$. {$\sin(\varphi) = 0{,}6$}
Mit einer Drehung um φ erreichen wir aus der Lage im Hauptachsensystem die Orientierung der Aufgabenstellung.
{Eine Vertauschung der Eigenwerte und eine Vorzeichenänderung in **R** erzeugt eine andere Zuordnung der Achsen oder eine andere Berechnung eines einzelnen Punkts, aber so, dass insgesamt dieselbe Ellipse entsteht. Diese Mehrdeutigkeit wurde in 7.7.2 schon eingehend diskutiert.}

♦ **Ergänzung** - zum Verständnis "System Zuordnung"

Als "alternative Lösung" wird angegeben $Q_A = 2\,(x - 4)^2 + 3\,(y - 1)^2 - 6 = 0$ {gültig für das Koordinatensystem von Q); zwar gleiches a und b, aber die verschiedene Verschiebung nach **P**(4 | 1). Ist das auch richtig? Ein Grund ist die vorher genannte und leider oft übliche "Sorglosigkeit" bei der Schreibweise. Q der Aufgabenstellung gilt für ein System **x** und Q' nach der Hauptachsentransformation für ein **x'**.

Präziser würde man schreiben: Q' = 2 [x' - 3,8]^2 + 3 [y' + 1,6]^2 - 6 = 0
Damit gilt unser {3,8; -1,6} für **x'** und {4; 1} für **x**. Mit der Transformation **x** = **R x'** folgt:
$(1/5) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3{,}8 \\ -1{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Q' und Q_A beschreiben dieselbe Ellipse wie Q, aber nicht mehr gedreht. Vorteil ist, dass beim Auflösen der Quadrate kein gemischtes Glied "xy" entsteht. Die Orientierung der Symmetrie-achsen ist jeweils parallel zu den Koordinatenachsen.
Eine Formel, die aufgelöst wieder Q liefert, also die verschobene und gedrehte Ellipse, wäre nach der Transformation **x'** → **x** der (umständliche) Ausdruck
Q = 2 [(4 x + 3 y - 19) / 5]^2 + 3 [(- 3 x + 4 y + 8) / 5]^2 - 6 = 0 {im System **x**}
{Ein Vorteil gegenüber der direkten Verwendung von Q ist nicht ersichtlich!}

♦ **Ergänzung -** Vergleich Rechnung in **x** und in **x'**
Gesucht sind die Koordinaten des rechten Scheitels.
In der einfachsten Form el: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ liegt dieser (bekanntlich) bei **S**(a | 0).
In Worten: **S** liegt auf der x-Achse im Abstand a vom Ursprung und die x-Achse ist dann auch eine Achse der Ellipse. {$a = \sqrt{3}$}
In unserem Hauptachsensystem verwenden wir den normierten Vektor $\mathbf{v_1}$ als die "x'-Achse".
Damit gilt für **s'**: $\mathbf{s'} = \begin{pmatrix} 3{,}8 \\ -1{,}6 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}532 \\ -1{,}6 \end{pmatrix}$ {Ursprung + Abstand · Einheitsvektor x-Achse}
Im Hauptachsensystem ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Koordinatendarstellung des Einheitsvektors in Richtung x'-Achse!
Umgerechnet auf das Ausgangssystem, {**x** = **R x'**}: $\mathbf{s} = (1/5) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5{,}532 \\ -1{,}6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}386 \\ 2{,}039 \end{pmatrix}$
Für die direkte Rechnung ist die Darstellung des Einheitsvektors zur Abstandsberechnung im Ausgangssystem nicht mehr einfach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sondern $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$.
Damit $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}386 \\ 2{,}039 \end{pmatrix}$ {Ursprung + Abstand · Einheitsvektor x-Achse}

10.2.3A Beispiel 2: Parabel

Q: $16 x^2 + 9 y^2 - 290 x + 30 y - 24 x y + 625 = 0$
Gesucht: Normallage dazu
Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 25$; normierte Eigenvektoren: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$
$\mathbf{R} = (1/5) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; linearer Term, $\mathbf{R^T k}$: $(1/5) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -290 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 \\ 250 \end{pmatrix}$
$25 y^2 - 150 x + 250 y + 625 = 0 \rightarrow y^2 - 6 x + 10 y + 25 = 0$
Im Koordinatensystem der Eigenvektoren: $(y+5)^2 = 6 x$
Normallage "$y^2 = 2 p x$", Scheitel **S**(0 | -5); p = 3
Scheitel im Ausgangssystem (von Q), {mit **x** = **R x'**}: $(1/5) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
{$y^2 = 6x$ gedreht um $\varphi \approx 53{,}13°$ und dann verschoben **S**(0 | 0) → **S**(4 | -3)}

10.2.3B Parabel - Eigenwerte umsortiert

Q wie in 10.2.3A

Eigenwerte mit anderer Reihenfolge: $\lambda_1 = 25$; $\lambda_2 = 0$;
normierte Eigenvektoren: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$;
jetzt $\mathbf{R} = (1/5) \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ {Spaltenvertauschung, passend zur Vertauschung der Eigenwerte}
linearer Term, $\mathbf{R^T k}$: $(1/5) \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -290 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ -150 \end{pmatrix}$
$25 x^2 + 250 x - 150 y + 625 = 0 \rightarrow x^2 + 10 x - 6 y + 25 = 0$
Im Koordinatensystem der Eigenvektoren: $(x+5)^2 = 6 y \rightarrow y = (1/6) (x + 5)^2$
Standardlage "$y^2 = a x^2$", Scheitel **S**(-5 | 0); a = 1/6

Vergleich: Scheitel im Ausgangs-Koordinatensystem (von Q): (1/5) $\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}$

{Das muss so sein: Die Drehung ändert nicht einen Punkt **O**(0|0) = Scheitel in der Normallage "$y^2 = 2\ p\ x$" und in der Standardlage "$y = a\ x^2$". Nur die Translation der Parabel verschiebt auch diesen Punkt.}

R ist wie gefordert eine orthogonale Matrix, | det(**R**) | = 1; {Drehspiegelung, **S**(≈ 71,57°)}

10.2.3C Parabel - Eigenwerte wie in 10.2.3B - zusätzlich Vorzeichen von v_2 geändert

Gleiches Q; Eigenwerte: $\lambda_1 = 25$; $\lambda_2 = 0$; **- v_2** statt **+v_2**

jetzt **R** = (1/5) $\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$; linearer Term, $\mathbf{R}^T$ **k**: (1/5) $\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-290\\ 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}250\\ 150\end{pmatrix}$

$25\ x^2 + 250\ x + 150\ y + 625 = 0 \rightarrow x^2 + 10\ x - 6\ y + 25 = 0$

Im Koordinatensystem der Eigenvektoren: $(x+5)^2 = -6\ y \rightarrow y = -(1/6)\ (x+5)^2$

Standardlage "$y^2 = a\ x^2$", Scheitel **S**(-5 | 0); a = - 1/6 {nach unten offene Parabel}

wie vorher: Scheitel im Ausgangs-Koordinatensystem (Q): (1/5) $\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}$

det(**R**) = +1, Drehmatrix **D**(≈ 143,13°)

Der Drehwinkel φ ≈ 143,13° = 53,13° + 90° ist in Übereinstimmung mit der Überlegung, dass die Standardlage um 90° gegenüber der Normallage verdreht ist. Um zur gleichen Lage Q zu kommen, müssen wir dann aber von einer nach unten geöffneten Parabel ausgehend transformieren!

10.2.4 Hyperbel

Q= $(108/25)\ x^2 + (312/25)\ x\ y + (17/25)\ y^2 - (2424/25)\ x - (1418/25)\ y + (7493/25) = 0$.

Gesucht sind die Geradengleichungen der beiden Asymptoten.

- Wegen gemischten Glieds "xy" ist die Hyperbel sicher gedreht.
- Eventuell ist die Hyperbel auch noch verschoben.
- In der Normallage $b^2\ x^2 - a^2\ y^2 = a^2\ b^2$.
- Für die Hyperbel in der Normallage ist die Gleichung der Asymptoten $y = \pm (b/a)\ x$.

$Q_{Teil} = A\ x^2 + B\ x\ y + C\ y^2$

{Ich multipliziere nicht mit dem gemeinsamen Nenner - für kleinere Eigenwerte.}

M = (1/25) $\begin{pmatrix}108 & 156\\ 156 & 17\end{pmatrix}$; Spur(**M**) = 5; det(**M**) = -36

charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - \lambda\cdot\text{Spur}(M) + \det(M) = \lambda^2 - 5\ \lambda - 36 = 0$

- ♦ Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 5/2 \pm 13/2$ = {9; -4}; $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

  Die verschiedenen Vorzeichen passen zu einer Hyperbel "$b^2\ x^2$ - ...".
- ♦ Eigenvektoren:

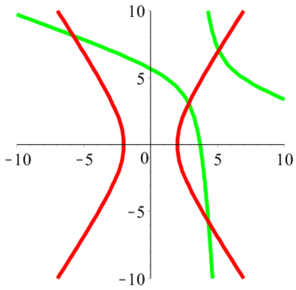
  λ = 9 (108/25 - 9) x - (156/25) y = 0 → x - (4/3) y = 0; Sei y = 1 → x = 4/3

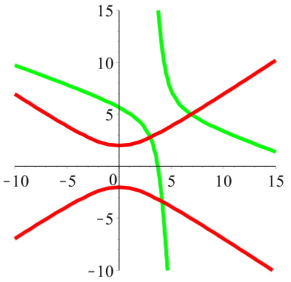
  λ = -4 (108/25 +4) x - (156/25) y = 0 → y = 1 → x = - 3/4

$\mathbf{x_1}$; $\mathbf{x_2}$: $\begin{pmatrix}4/3\\ 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-3/4\\ 1\end{pmatrix}$ {wie gefordert orthogonal}

$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}4/5\\ 3/5\end{pmatrix}$; $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}-3/5\\ 4/5\end{pmatrix} \rightarrow$ **R** = (1/5) $\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; {Drehmatrix}

Vergleich cos(φ), sin(φ): φ ≈ 36,87°





Normalform hyp: $9\ x^2 - 4\ y^2 = 36$ Alternativ hyp: $9\ y^2 - 4\ x^2 = 36$

Standard-Achsensystem; grün = Ausgangs-Quadrik; rot = Hauptachsenform = Normalform

{links Standardanordnung, rechts gedreht}

Weil die Asymptoten im Ausgangssystem gesucht sind, ist es überflüssig für beide Normalformen weiter zu rechnen. Wir rechnen mit der üblichen Lage {Hauptachse a in x-Richtung}.

Transformation der linearen Koeffizienten: $\mathbf{R^T} \binom{C}{D} = (1/5) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2424/25 \\ -1418/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -558/5 \\ 64/5 \end{pmatrix}$

{Damit sind die linearen Terme im Hauptachsen-Koordinatensystem bekannt. Um die Verschiebung ablesen zu können, nun noch die quadratische Ergänzung.}

Für x: $9\,x^2 - 558/5\,x = 9\,(x^2 - 558/45\,x) = 9\,(x^2 - 558/45 + (558/90)^2) - 9\,(558/90)^2$
$9\,(x - 31/5)^2 - 8649/25$
Analog für y: $-4\,y^2 + 64/5\,y = -4\,(y^2 - 16/5\,y) = -4\,(y - 8/5)^2 - 4 \cdot - 64/25$
$-4\,(y - 8/5)^2 + 256/25$
Insgesamt ist der absolute Term: $[7493 - 8649 + 256] / 25 = -36$
hyp: $9\,(x - 31/5)^2 - 4\,(x - 8/5)^2 = 36$ im Hauptachsensystem!
{"sorglose" Schreibweise! Also - wenn man präziser schreiben will - besser x' und y'.}
Der Nullpunkt des Hauptachsensystems ist **O**(0 | 0). Der Mittelpunkt der Hyperbel (sei **P**) im Hauptachsensystem ist nicht **P**(0 | 0), sondern **P**(31/5 | 8/5)! Es gilt nur: Die Hauptachsen sind parallel zu den Symmetrieachsen der Hyperbel!
Uns interessiert noch die Verschiebung des Mittelpunkts **P**, ausgedrückt im Ausgangssystem.
$\mathbf{x} = \mathbf{R}\,\mathbf{x'}$ {Erinnerung: **x**(Ausgangssystem) = **R x'**(Hauptachsensystem)}
$\mathbf{x} = \mathbf{R}\,\mathbf{x'} = (1/5) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \binom{4}{5} \rightarrow$ **P**(4 | 5)
hyp: $9\,(x - 4)^2 - 4\,(x - 5)^2 = 36$ im Ausgangssystem von Q beschreibt die Hyperbel mit der richtigen Verschiebung, aber ohne Drehung, also einer Lage "Symmetrieachsen parallel zu den Koordinatenachsen".
Der Vorteil des Hauptachsensystems ist, dass weitere Rechnungen darin viel einfacher sein können. Die Gleichung für die Asymptoten ist bekannt, asy: $y = \pm (b/a)\,x$.
Wir wollen aber "asy" im Ausgangsystem wissen. Berechnung entweder über eine Gerade durch 2 Punkte oder durch Transformation der Geradengleichung.
Beispielrechnung für $y = + (b/a)\,x = (3/2)\,x$.

A) P_1: Der Ursprung wird nur verschoben (0 | 0) → (4 | 5). P_2: irgendein weiterer Punkt auf der Geraden, z.B. (2 | 3); Drehung → $(1/5) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \binom{2}{3} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 18/5 \end{pmatrix}$;
Verschiebung → $\begin{pmatrix} -1/5 \\ 18/5 \end{pmatrix} + \binom{4}{5} = \begin{pmatrix} 19/5 \\ 43/5 \end{pmatrix}$
Gerade, z.B. mit $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$; $y = m\,x + y_1 - m\,x_1$
$m = (43/5 - 5) / (19/5 - 4) = -18$; $y_1 - m\,x_1 = 5 + 4 \cdot 18 = 72 \rightarrow$ asy_1: $y = -18\,x + 77$

B) $y = m\,x$; Drehung: $x = x' \cos(\varphi) + y' \sin(\varphi)$; $y = -x' \sin(\varphi) + y' \cos(\varphi)$;
eingesetzt und geordnet; $\rightarrow m' = [m \cos(\varphi) + \sin(\varphi)] / [\cos(\varphi) - m \sin(\varphi)] = -18$
Verschiebung: $(y' - 5) = m'\,(x' - 4) \rightarrow$ asy_1: $y' = -18\,x + 77$

Analog für $y = -(3/2)\,x$: asy_2: $y = -(6/17)\,x + (109/17)$

Grafik

grün: Hyperbel
rot: Asymptote 1
blau: Asymptote 2