Reflexion - Teil 1

Ohne Beweis: Es gilt das Gesetz "Einfallswinkel = Ausfallswinkel"

Gesucht ist eine Beschreibung mit Vektoren.

1. Formel unter Verwendung von Vektoren

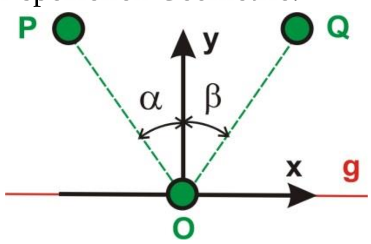
♦ 1A Spezielle Geometrie

Die Herleitung einer Formel geschieht am einfachsten mit einer speziellen Geometrie.

Eine Gerade g liegt in der x-Achse (eines kartesischen Koordinatensystems).

Ein Punkt sei **P(-2 | 3)**. Von dort aus geht ein Strahl zum Koordinatenursprung **O(0 | 0)** und wird an g reflektiert.

Durch Reflexion wird dann der Punkt **Q(2 | 3)** erreicht.



Die Reflexionsbedingung ist eingehalten, wenn - in dieser speziellen Anordnung - **Q** die gleiche y-Koordinate wie **P** und **Q** das Negative der x-Koordinate von **P** hat.

Der **Einfallswinkel α** liegt zwischen $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ und der Normalen auf g, der Ausfallswinkel β - mit gleichem Betrag wie α - zwischen $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ und der Normalen.

{Man kann prinzipiell die Winkel auch relativ zu g angeben. In R^2 ist das unerheblich, in R^3 ist aber <u>nur</u> mit diesem Lotwinkel die Behandlung möglich!}

In dieser speziellen Geometrie sind die Formeln trivial anzugeben.

Der Vektor $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ enthält als Komponenten die Koordinaten von **P**, $\begin{pmatrix} -L\sin(\alpha) \\ L\cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

L ist die Länge des Vektors.

$\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ mit der gleichen Länge L hat das Negative der x-Koordinate, $\begin{pmatrix} L\sin(\alpha) \\ L\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

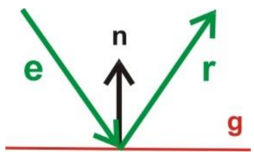
♦ 1B Allgemeine Behandlung

Eine Normale auf g ist $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dabei haben wir schon einen <u>normierten</u> Vektor $|\mathbf{n}| = 1$ benutzt!

e sei der Vektor für den einfallenden Strahl und **r** der Vektor für den reflektierten Strahl.

Naheliegend ist
 e als einfallender Strahl und
 r als reflektierter Strahl
und **n** liegt in der gleichen Halbebene relativ zu g



Für diese Wahl ist

e von **P** nach **O** ($\overrightarrow{\mathbf{PO}}$)

e = $\begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ {"Endpunkt - Anfangspunkt des Vektors"}

r von **O** nach **Q** angesetzt. ($\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$)

r = $\begin{pmatrix} 2-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Zu einer allgemeinen Beziehung kommen wir, indem wir nur die Eigenschaft gleicher Winkel zwischen den Orientierungen von **e**, **n** und **r**, **n** benutzen.

{Anschaulich betrachten wir dann nur die relativen Lagen von Geraden in Richtung dieser Vektoren. Beim Einsetzen von Vektoren sind weitere Fallunterscheidungen nötig!}

Winkel <u>zwischen</u> zwei Vektoren lassen sich über das Skalarprodukt berechnen.

a·b = |**a**| |**b**| cos(φ)

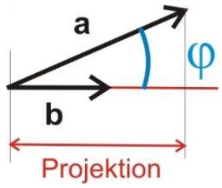
Interessant ist der Fall, wenn einer der Vektoren normiert ist.

Sei |**b**| = 1.

Dann ist |**a**| cos(φ) die Länge der Projektion von **a** auf **b**.

Dies ist gleich **a·b**.

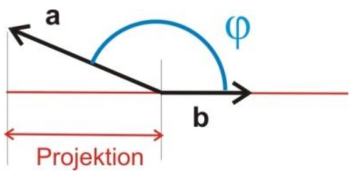
(a·b) b ist dann ein Vektor mit der Länge dieser Projektion in Richtung von **b**.



Für einen stumpfen Winkel φ ist cos(φ) <0.

Also ist auch **a·b** <0.

-(a·b) b ist dann ein Vektor mit der Länge dieser Projektion in Richtung von **b**.



Diesen Zusammenhang verwenden wir für die Reflexion.

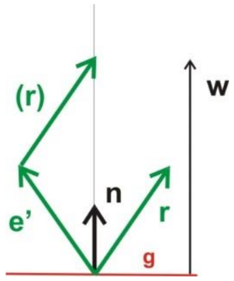
Für eine einfachere Skizze verwenden wir den Gegenvektor **e'** (in gleicher Halbebene wie **n**); **e'** = **-e**

Eine Vektorkette zeigt: **e'** + **r** = **w**.

w ist ein Vektor in Richtung von **n** mit der Länge "zweimal Projektion von **e'** auf **n**".

w = 2 (**e'·n**) **n**

r = **-e'** + 2 (**e'·n**) **n**



Für **e'** und **r** lässt sich alternativ zeichnen:

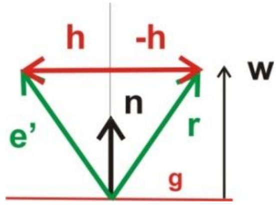
w ist der Vektor für die Projektion von **e'** auf **n**.

h ist der Vektor von der Normalen auf den Endpunkt von **e'**

Es gelten die Vektorbeziehungen

  e' = **w** + **h**

  r = **w** + (**-h**)



r = **w** + **w** - **e'** und mit **w** = (**e'·n**) **n** wie vorher **r** = **-e'** + 2 (**e'·n**) **n**

Für die anfangs benutzte Geometrie mit **e** die Rücksubstitution {unter Beachten von (**e'·n**) = - (**e·n**)}

r = **e** - 2 (**e·n**) **n**

Damit **e·n** = $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = -3 und (**e·n**) **n** = $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

r = $\begin{pmatrix} 2-0 \\ -3-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ ☑

Die Richtung des einfallenden Strahls muss beachtet werden, wenn Vektoren benutzt werden.

Für **e**: $\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}$

Für **e'**: $\mathbf{r} = -\mathbf{e}' + 2\,(\mathbf{e}'\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}$

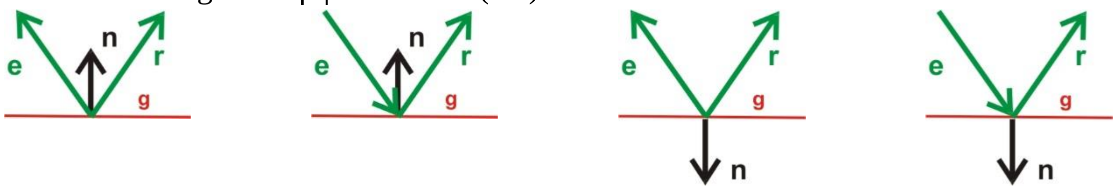
Zusätzlich wäre ein Vektor **n'** = -**n** auch eine Normale auf g!
(Das liefert 2 neue Formeln.)

{Mit einer Skizze könnte man selbstverständlich feststellen, welcher der 4 Fälle vorliegt. Lässt man zusätzlich einen Gegenvektor **r'** = -**r** zu, sind für die relative Lage der drei Vektoren 8 Fälle möglich.}

♦ 1C Fallunterscheidung und Lösungs-Strategien

Sinnvoll ist aber eine rein rechnerische Lösung. Es folgen dann zwei Verfahren für die praktische Durchführung.

In allen Fällen gilt mit |**n**| = 1: $\mathbf{w} = 2\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}$



r = -e + w	**r = e - w**	**r = -e + w**	**r = e - w**
e·n > 0	**e·n** < 0	**e·n** < 0	**e·n** > 0
A1	**B1**	**A2**	**B2**

Das Produkt **e·n** allein ermöglicht keine Unterscheidung aller 4 Fälle. Es stellt sich daher die Frage, ob eine solche Unterscheidung aller 4 Möglichkeiten überhaupt nötig ist!

Lösung 1: Die Unterscheidung ist gar nicht nötig. Es interessiert nur die Richtung des reflektierten Strahls in Form einer Geraden. Das errechnete **r** ist der Richtungsvektor einer Geraden **x** = **a** + t **r**. **a** ist irgendein Punkt auf dieser Geraden. Ob **+r** oder **-r** verwendet wird, ist irrelevant, t nimmt dann einfach einen anderen Wert an. Jeder Punkt auf der Geraden ist so völlig eindeutig definiert.

Wir verwenden r = e - w = e - 2 (e·n) n zur Bestimmung der Geraden.

Lösung 2: Die Aufgabenstellung enthält schon automatisch eine Einschränkung. "Von einem Punkt **P** geht ein Strahl in Richtung der Geraden g." Damit sind nur noch die Fälle B1 und B2 möglich. Falls gewünscht, sind diese über "spitzer / stumpfer Winkel zwischen **e** und **n**" unterscheidbar, also über das Vorzeichen des Skalarprodukts **e·n**. **w** ist in beiden Fällen gleich! Mit **n'** = **- n** ist **(e·n) n** = **(e·n') n'.** Das errechnete **r** liegt in der gleichen Halbebene relativ zu **n** wie **e**.

Für B1 und B2 gilt die gleiche Formel r = e - w = e - 2 (e·n) n ! (mit | n | = 1!)

Mit nicht normierter Normale n: $$\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\,\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}$$

DIES IST DIE LÖSUNGSFORMEL.

Sie liefert die Vektoren bei einer Anordnung **e** in Richtung der Geraden und **r** von der Geraden weg. Sie liefert auf jeden Fall die Gerade (Richtungsvektor) für den reflektierten Strahl.

♦1D Zusammenhand mit der speziellen Geometrie (1A)

Der unter 1A angegebene, einfache Zusammenhang lässt sich mit der allgemeinen Formel reproduzieren. Mit **e** = $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ und **r** = $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ liegt die Situation A1 vor.

Es gilt damit **r = -e + w = -e + 2 (e·n) n.**

e·n = $\begin{pmatrix} -L\sin(\alpha) \\ L\cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = L cos(α). r = $\begin{pmatrix} +L\sin(\alpha) \\ -L\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ + 2 L cos(α) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} L\sin(\alpha) \\ L\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

2. Fallunterscheidung: Beispiel (zu A1 ... B2)

♦ 2A Verwendung der "richtigen Formel" gemäß obigem Schema

Fall	**e**	**n**	**e·n**	**w = (e·n) n**	Formel	**r**
A1	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	**r = -e** + 2 **w**	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
B1	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	-3	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$	**r** = **e** - 2 **w**	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
A2	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	-3	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	**r = -e** + 2 **w**	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
B2	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$	**r** = **e** - 2 **w**	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

In allen Fällen erhalten wir das gleiche r.

♦ 2B Ergebnis, falls für alle 4 Fälle r = e - 2 (e·n) n verwendet wird.

Fall	**e**	**n**	**e·n**	**(e·n) n**	**r**
A1	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
B1	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	-3	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
A2	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	-3	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
B2	$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Für A1 und A2 erhalten wir den Gegenvektor. {Als Richtungsvektor einer Geraden verwendet ist das dieselbe Gerade!}

In allen Fällen erhalten wir den richtigen Richtungsvektor für die reflektierte Gerade.

♦ 2C Stets richtiger Vektor r bei der Angabe "Der Einfallsvektor zeigt von P auf die Gerade g".

"Von **P(-2 | 3)** geht ein Strahl nach **O(0 | 0)** auf g und wird dort reflektiert."

n = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder **n** = $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ → **r** = **e - 2 (e·n) n** = $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ - 2 $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

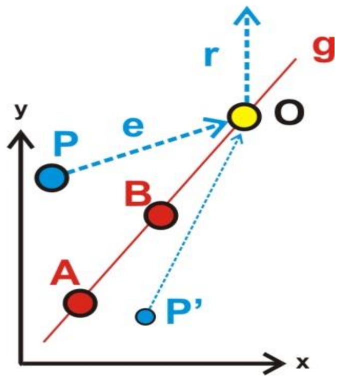
Die Richtung der Normalen (Vektor oder Gegenvektor) spielt keine Rolle.

3. Beispiel - Der Reflexionspunkt ist bekannt

♦3A Aufgabenstellung und Lösung

Eine Gerade g geht durch die Punkte **A**(2 | 3) und **B**(5 | 7).
Ein Strahl geht von **P**(1 | 9) nach **O**(8 | 11) auf g.
Gesucht ist der Vektor des an g reflektierten Strahls.
Zusätzlich: Einfallswinkel (= Ausfallswinkel).

Skizze
(enthält auch **P'** von Aufgabenstellung 3B)



Richtungsvektor der Geraden: $\binom{5}{7} - \binom{2}{3} = \binom{3}{4}$

Normale mit dem "Standardrezept" Koordinatenvertauschung und 1 Vorzeichenwechsel:

Normale: $\mathbf{n'} = \binom{-4}{3}$; $|\,\mathbf{n'}\,| = 5 \rightarrow$ (normierte Normale) $\mathbf{n} = \binom{-4/5}{3/5}$

einfallender Vektor: $\mathbf{e} = \binom{8}{11} - \binom{1}{9} = \binom{7}{2}$

$\mathbf{e{\cdot}n} = -28/5 + 6/5 = -22/5 \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{e} - \mathbf{2\ (e{\cdot}n)\ n} = \binom{7}{2} - 2{\cdot}(-22/5){\cdot}\binom{-4/5}{3/5} = \binom{-1/25}{182/25}$

Der Winkel zwischen **e** und **n** ist mit $\cos(\alpha') = \mathbf{(e{\cdot}n)} / |\,\mathbf{e}\,| = (-22/5) / \sqrt{53} \rightarrow \alpha' \approx 127{,}2°$.
Da als Einfallswinkel der spitze Winkel zwischen der Einfallsrichtung und der Normalen angegeben wird, ist dieser $\alpha \approx 52{,}8°$.
{In einer Skizze wäre das der Winkel zwischen **-e** und **n**.}
Der Ausfallswinkel β - zwischen **r** und **n** - ist auch 52,8°. Folgt das auch rechnerisch?
$\cos(\beta) = \mathbf{(r{\cdot}n)} / |\,\mathbf{r}\,|$. $\mathbf{r{\cdot}n} = +22/5$ und $|\,\mathbf{r}\,| = \sqrt{53}$. $\cos(\beta) = (+22/5) / \sqrt{53} \rightarrow \beta \approx 52{,}8°$.

Allgemein sehen wir für unseren *Fall B1*:
$\cos(\alpha')$ zwischen **e** und **n**: $\cos(\alpha') = \mathbf{(e{\cdot}n)} / |\,\mathbf{e}\,|$
$\cos(\beta)$ zwischen **r** und **n**: $\cos(\beta) = \mathbf{(r{\cdot}n)} / |\,\mathbf{r}\,|$
$\mathbf{r{\cdot}n = [e - 2\ (e{\cdot}n)\ n]\ {\cdot}n = e{\cdot}n - 2\ (e{\cdot}n){\cdot}(n{\cdot}n) = -\ (e{\cdot}n)}$ {mit $\mathbf{n{\cdot}n} = 1$}
Gleiche Beträge $|\,\mathbf{e}\,| = |\,\mathbf{r}\,|$ sehen wir einfacher über gleiche Betragsquadrate:
$\mathbf{r{\cdot}r} = (\mathbf{e} - 2\ \mathbf{e{\cdot}n\ n}){\cdot}(\mathbf{e} - 2\ \mathbf{e{\cdot}n\ n}) = \mathbf{e{\cdot}e} - 2\ \mathbf{e{\cdot}n\ n{\cdot}e} - 2\ \mathbf{e{\cdot}n\ e{\cdot}n} + 4\ (\mathbf{e{\cdot}n})^2\ \mathbf{n{\cdot}n}$
Mit dem Skalar $\mathbf{e{\cdot}n} = \mathbf{n{\cdot}e}$ und (wegen des normierten **n**) $\mathbf{n{\cdot}n} = 1$.
Damit: $\mathbf{r{\cdot}r} = \mathbf{e{\cdot}e}$
Es folgt $\cos(\beta) = -\cos(\alpha')$. Dies gilt, wenn $\beta = 180° \pm \alpha'$.
{Für die Anordnung B1 haben wir allgemein über **e·n** einen stumpfen Winkel α' und über **r·n** den dazugehörenden spitzen Winkel β.}

♦3B Einfallender Vektor geändert gegenüber 3A

In 3A liegen **P** und die Richtung von **n** in der gleichen Halbebene von g. Jetzt liege **P'** auf der anderen Seite, **P'**(3 | 2). {Dies entspricht dem Fall B2.}

(normierte Normale) $\mathbf{n} = \binom{-4/5}{3/5}$

einfallender Vektor: **e** = $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

e·n = -20/5 +27/5 = +7/5 → **r** = **e - 2 (e·n) n** = $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ - 2·(7/5)·$\begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 181/25 \\ 183/25 \end{pmatrix}$

| **e** | = $\sqrt{106}$

cos(α) = **(e·n)** / | **e** | = (7/5) / $\sqrt{106}$ → α ≈82,2°.

Es gilt wieder **r·n = - (e·n)** und | **r** | = | **e** |. cos(β') = - cos(α); β' ≈ 97,8°

Als Reflexionswinkel gilt wieder der spitze Winkel dazu β ≈ 82,2°

{Im Fall B2 erhalten wir direkt einen spitzen Einfallswinkel. Die Rechnung über **r·n** liefert einen stumpfen Winkel. Üblicherweise führt man die Berechnung des Ausfallswinkel nicht durch, weil "Einfallswinkel = Ausfallswinkel" bekannt ist; sie ist eventuell als Rechenkontrolle nützlich.}

♦3C Lösung unter Verwendung der speziellen Geometrie (1A)

Das ist prinzipiell möglich, bietet aber keine Vorteile!

Die Reflexionsbedingung ist in der speziellen Geometrie unmittelbar einsichtig formuliert. Für eine allgemeine Geometrie sind aber dann mehr Rechenschritte nötig als nach der Direkten Methode nach 1C. Entweder muss durch eine Skizze oder durch Fallunterscheidungen eine Orientierung des Vektors **e** (**e** oder der Gegenvektor **-e**) gefunden werden, damit die Drehung eine Anordnung nach A1 erzeugt. Zusätzlich müssen der Richtungsvektor der Geraden g und die x-Achse einen spitzen Winkel einschließen. (Bei einem stumpfen Winkel φ müsste mit 180° - φ weiter gerechnet werden.) In der allgemeinen Lösung nach 1C entfällt dieser Aufwand!

Nur um zu zeigen, dass dieser Weg prinzipiell möglich wäre:

Der allgemeine Fall unterscheidet sich gegenüber 1A durch eine Drehung und Verschiebung. Es reicht aus, nur die Drehung zu berücksichtigen, wenn nur der Vektor des reflektierten Strahls gesucht wird. (Erst wenn die Lage von Punkten angegeben werden soll, muss auch die Verschiebung behandelt werden.)

In der speziellen Geometrie liegt die Gerade in der x-Achse, allgemein hat sie einen Winkel φ dazu. Zur Lösung der Reflexionsbedingung wird zuerst **e** um diesen Winkel zurückgedreht, dann **r** in der speziellen Geometrie berechnet und dann dieses **r** um φ gedreht.

Für eine Drehung um φ im Gegenuhrzeigersinn (mathematisch positiver Winkel) ist die Drehmatrix **D**(φ) = $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Daten des Beispiels 3A:

Der Richtungsvektor der Geraden ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; Betrag 5

Winkel mit der x-Achse: cos(φ) = $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ · $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ / 5 = 3/5; sin(φ) = 4/5. (φ ≈ 53,1°)

Durch eine "gedankliche Skizze" oder die Rechnung sehen wir die Forderung "spitzer Winkel" erfüllt. {Alternativ verwendet man einfach den Betrag des Skalarprodukts.}

e = $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ zeigt nicht in eine Richtung, aus der mit einer Drehung die geforderte spezielle Geometrie (entsprechend A1) entstehen kann. Es muss also der Gegenvektor $\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ verwendet werden.

Drehung, damit g in der x-Achse liegt: **D**(-φ)

Damit **e**{speziell} = **D**(-φ) $\begin{pmatrix}-7\\-2\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}3/5 & 4/5\\-4/5 & 3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\-2\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}-29/5\\22/5\end{pmatrix}$

r{speziell} = $\begin{pmatrix}+29/5\\22/5\end{pmatrix}$ {Negatives der x-Koordinate}

Rückdrehung (in Ausgangslage von g): **D**(+φ)

r = $\begin{pmatrix}3/5 & -4/5\\4/5 & 3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}29/5\\22/5\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}-1/25\\182/25\end{pmatrix}$ ☑

Anmerkung:

Verwendet man **e** = $\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ erhält man **-r**.

Verwendet man für die Gerade den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$, folgt ein stumpfer Winkel. Für den dazugehörenden spitzen Winkel folgt die vorherige Rechnung.