Reflexion - Teil 2

1. Formel unter Verwendung von Vektoren (1. - 7. in R^2)
2. Fallunterscheidung: Beispiele zu 1.
3. Beispiel - Reflexionspunkt bekannt
4. **Muss zur Berechnung von r der Reflexionspunkt bekannt sein?**
5. **Beispiel - Reflexion und Spiegelpunkt**
6. **Beispiel - Suche des Reflexionspunkts**
7. **Beispiel - Einfallswinkel gegeben**
8. Formel in R^3
9. Beispiele zu R^3
10. Behandlung mit einem Matrixformalismus (R^2)

4. Muss zur Berechnung von r der Reflexionspunkt bekannt sein?

NEIN!

Eine Gerade g geht durch **A**(2 | 4) und **B**(8 | 1). Ein einfallender Strahl geht von **P**(3 | 7) nach **X**(5 | -1) und schneidet dabei die Gerade g. (**X** liegt nicht auf der Geraden.) Gesucht **r**.

♦4A Lösung mit den Originaldaten

g: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$; Normale $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$, gekürzt $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\mathbf{n{\cdot}n} = 5$

$\mathbf{e} = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$

{Das könnte zu $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ gekürzt werden, weil damit die Richtung gleich bleibt.}

{Nach dem Aufgabentext liegt die Situation B1 oder B2 vor.}

$\mathbf{e{\cdot}n} = -14$

{Damit wäre auch ohne Skizze geklärt, dass Situation B1 vorliegt - falls dies interessiert.}

$\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\,\frac{\mathbf{e\cdot n}}{\mathbf{n\cdot n}}\,\mathbf{n} = \begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix} - 2\cdot(-14)/5\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}38/5\\16/5\end{pmatrix}$

{Mit einer Skizze könnten wir das Resultat überprüfen.}

♦4B Vergleich - Lösung mit Reflexionspunkt

Die Reflexion erfolgt am Schnittpunkt von einfallendem Strahl und der Geraden g.

Aus "g = **e**" $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ folgt s = 1, t = 1.

Damit ist der Schnittpunkt **O**(4 | 3).

Dann ist $\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{PO}} = \begin{pmatrix}4-3=1\\3-7=-4\end{pmatrix}$; $\mathbf{e{\cdot}n} = -7$; $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} - 2\cdot(-7)/5\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19/5\\8/5\end{pmatrix}$ ☑

r hat eine andere Länge, aber die gleiche Richtung.

Bei bekanntem Reflexionspunkt **O** kann man berechnen, wo der Punkt **Q** liegt. Ohne **O** erhält man aber die richtige Richtung von **r**.

♦4C Vergleich - Von der Geraden g ist nur der Richtungsvektor bekannt

Die Richtung von **r** ist berechenbar, der Schnittpunkt **S** ≡ **O** nicht mehr.

n ist damit berechenbar, **n** = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; **e** = $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

{Damit wurden die Ausgangswerte von 5A so gekürzt, dass möglichst kleine Zahlen vorliegen, weil es nur auf die Richtungen ankommt!}

n·n = 5 und **e·n** = -7. **r** = $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ - 2·(-7)/5·$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}19/5\\8/5\end{pmatrix}$ ☑

♦ Wenn für **u** der Gegenvektor **-u** und entsprechend für **n** der Gegenvektor **-n** benutzt wird, ändert sich nichts. Dann **n·n** = 5 und **e·n** = +7; **r** = $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ - 2·(+7)/5·$\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}19/5\\8/5\end{pmatrix}$ ☑

♦ Was folgt, wenn für **e** der Gegenvektor **-e** eingesetzt wird?

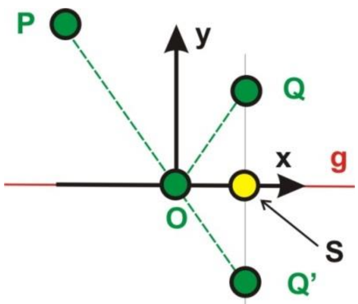
{Ausgehend von **P** würde dann **e** die Gerade g nicht mehr schneiden.}

n = $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; **e** = $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$; **n·n** = 5 und **e·n** = +7; **r** = $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ - 2·(+7)/5·$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}-19/5\\-8/5\end{pmatrix}$!

Wir erhalten dann den Gegenvektor zum vorherigen **r**!

Dies ist der unter 1C, Lösung 1 genannte Sachverhalt. Wenn nur 2 Vektoren für **e** und **u**(g) bekannt sind, ist die Lösung **+r** oder **-r**. Eine Bestimmung, wo Punkte liegen, ist nicht mehr möglich, weil nur Richtungen vorliegen. Es wird aber ein korrekter Richtungsvektor für die zu **r** gehörende Gerade erhalten!

5. Beispiel - Reflexion und Spiegelpunkt



Zum Punkt **Q** der durch die Reflexion von $\overrightarrow{\mathbf{PO}}$ an g entsteht gibt es den Spiegelpunkt **Q'**, der durch die Verlängerung von $\overrightarrow{\mathbf{PO}}$ entsteht.

In der speziellen Geometrie (der Skizze) ist das **Q'**(x |-y) zu **Q**(x | y).

Allgemein liegen **Q** und **Q'** auf einer Normalen von g.

Eine mögliche Anwendung dazu ist die Suche des Reflexionspunkts **O**, wenn **P** auf dem einfallenden Strahl und **Q** auf dem reflektierten Strahl bekannt sind.

Berechnung von **Q'** in R^2:

1. **n** aus g (Standardrezept für **u**(g))
2. Lotgerade l durch **Q** mit Richtungsvektor **n**
3. Schnittpunkt der Lotgeraden l mit der Geraden g liefert den Schnittpunkt **S** (Ortsvektor **s**)
4. Vektor **v** = $\overrightarrow{\mathbf{QS}}$
5. Ortsvektor **q'**: **q'** = **q** + 2 **v** oder **q'** = **s** + **v**

Der Reflexionspunkt **O** ist dann der Schnittpunkt von $\overrightarrow{\mathbf{PQ'}}$ von **P** oder **Q'** aus mit g.

Beispiel

Gerade g geht durch **A**(2 | 4) und **B**(8 | 1). Einfallender Strahl ausgehend von **P**(3 | 7). Reflektierter Strahl erreicht **Q**(89/10 |23/10). Gesucht **O** (über **Q'**).

(Wie auch in der Skizze angedeutet: **Q** ist <u>nicht</u> "**P** gespiegelt an der Normalen"! **Q** liegt nur auf **r** - ausgehend von **O**.)

Eine "schöne" Textformulierung dazu wäre: Ein reflektierendes Objekt (z.B. ein Alien-Raumschiff) steht irgendwo auf einer geraden Straße durch **A** und **B**. Von **P** wird schwenkend ein Laserstrahl ausgesandt. In **Q** steht eine Empfangsstation. Wenn in **Q** ein Signal beobachtet wird, ist das Objekt geortet.

1. $\mathbf{u} = \binom{6}{-3} \to \mathbf{n} = \binom{1}{2}$; g: $\mathbf{x} = \binom{2}{4} + k\binom{6}{-3} \to \mathbf{x} = \binom{2}{4} + k\binom{2}{-1}$
2. l: $\mathbf{x} = \binom{89/10}{23/10} + m\binom{1}{2}$
3. $2 + 2k = 89/10 + m \wedge 4 - k = 23/10 + 2m \to k = 31/10;\ m = -7/10$
   (Rechenkontrolle: für g und l das gleiche **s** erhalten.)
   $\mathbf{s} = \binom{82/10}{9/10}$
4. $\mathbf{v} = \mathbf{s} - \mathbf{q} = \binom{82/10}{9/10} - \binom{89/10}{23/10} = \binom{-7/10}{-14/10}$
5. $\mathbf{q}' = \mathbf{s} + \mathbf{v} = \binom{82/10}{9/10} + \binom{-7/10}{-14/10} = \binom{75/10}{-5/10} = \binom{15/2}{-1/2}$

Reflexionspunkt:

$\overrightarrow{\mathbf{PQ'}} = \mathbf{q}' - \mathbf{p} = \binom{15/2}{-1/2} - \binom{3}{7} = \binom{9/2}{-15/2}$

Gerade von **P** aus: $\mathbf{x} = p + m\,\overrightarrow{\mathbf{PQ'}} = \binom{3}{7} + m\binom{9/2}{-15/2}$

Schnitt mit g: $2 + 2k = 3 + (9/2)m \wedge 4 - k = 7 + (-15/2)m \to k = 2;\ m = 2/3$
Eingesetzt in die Geraden: Schnittpunkt = Reflexionspunkt **O**(6 | 2)

Hinweis: Dieser Rechenweg in R^3

In R^3 sind die Rechenschritte prinzipiell gleich. Zuerst ist der Spiegelpunkt zu berechnen.

Dann der Schnittpunkt der Geraden von **P** oder **Q'** aus mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{\mathbf{PQ'}}$ mit der Geraden oder der Ebene. Wie die geeignete Normale für die Berechnung des Spiegelpunkts bei einer Geraden erhalten wird, ist unten - 9D - gezeigt.

6. Beispiel - Suche des Reflexionspunkts

Bekannt sind: Punkt **P** auf **e**, ein Punkt **Q** auf **r**, Gerade g

Der Reflexionspunkt **O** wird anfangs allgemein definiert, **O**(x | y). Dabei wird y aber durch die Geradengleichung als Ausdruck in x eingesetzt.

♦ Dies ist ein alternatives Verfahren zu Beispiel 6 mit dem Spiegelpunkt.

Lösungsstrategie:

1. $\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{PO}}$
2. **r** wird berechnet mit $\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\,\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}$.
   n folgt aus dem Richtungsvektor von g mit dem "Standardrezept".
3. Der Vektor $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ ist ein Vielfaches von **r**, $\overrightarrow{\mathbf{OQ}} = t\,\mathbf{r}$.
   Dies führt zu einem System mit 2 linearen Gleichungen für die 2 Unbekannten t und x.
   Aus der Lösung x folgt mit der Geradengleichung y, also **O**(x | y).
   Als eventuelle Rechenkontrolle: $t\,\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathbf{OQ}}$

Rechnung:

Gerade g durch **A**(2 | 4) und **B**(8 | 1). $\mathbf{u} = \binom{6}{-3} \to \mathbf{n} = \binom{1}{2}$;

g: $\mathbf{x} = \binom{2}{4} + m\binom{6}{-3}$ und $y = -x/2 + 5$

Einfallender Strahl ausgehend von **P**(3 | 7).
Reflektierter Strahl durch **Q**(89/10 |23/10).
O als "allgemeiner Punkt auf g": **O**(x | -x/2+5)

1. $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} x-3 \\ -x/2-2 \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}$ = x - 3 - x - 4 = -7. $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$ = 5

   $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x-3 \\ -x/2-2 \end{pmatrix} - (-14)/5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1/5 \\ -x/2+18/5 \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{\mathbf{OQ}} = \begin{pmatrix} 89/10-x \\ x/2-27/10 \end{pmatrix}$

   89/10 - x = t (x - 1/5) $\wedge$ x/2 - 27/10 = t (-x/2 + 18/5)

   (x/2 - 27/10) (x - 1/5) = (89/10 - x) (-x/2 + 18/5)

   $x^2/2$ - 28/10 x + 27/50 = $x^2/2$ - 161/20 x + 1602/50

   105/20 x = 1575/50 → x = 6 und t = 1/2

   y = -6/2 + 5 = 2 → **O**(6 | 2)

   Kontrolle: t **r** = 1/2 $\begin{pmatrix} 6-1/5 \\ -6/2+18/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 3/10 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{\mathbf{OQ}} = \begin{pmatrix} 89/10-6=29/10 \\ 6/2-27/10=3/10 \end{pmatrix}$

7. Beispiel - Einfallswinkel gegeben

♦ Mit der Reflexionsbedingung "Einfallswinkel = Ausfallswinkel" können Vektoren für den einfallenden und reflektierten Strahl angegeben werden.

♦ Wenn ein Punkt auf **e** oder **r** bekannt ist, lässt sich auch der Reflexionspunkt auf der Geraden berechnen.

Beispiel:

a) Gerade g durch **A**(2 | 4) und **B**(8 | 1). $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

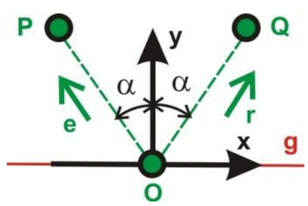
   g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Der einfallende Strahl hat einen Winkel 30° relativ zu g.

   (Damit ist der Einfallswinkel 60°; sin(α) = $\sqrt{3}/2$; cos(α) = 1/2)

b) Punkt auf **e**: **P**(3 | 7)

♦ 7A Vektor r

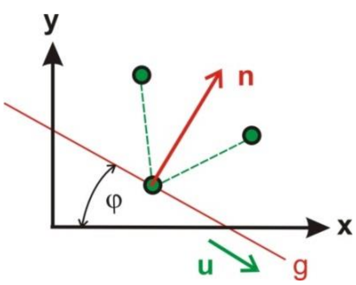


In der speziellen Geometrie ist unmittelbar anzugeben.

Als Vektor $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ wird ein Einheitsvektor benutzt,

dann $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Allgemein liegt g nicht in der x-Achse



g bildet einen Winkel φ mit der x-Achse - laut Skizze!

In der speziellen Geometrie ist $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allgemein ist **n** um φ gedreht.

→ Auch **e** und **r** sind um diesen Winkel gedreht.

Zusammenhang der Vektoren:

v(gedreht) = **D(φ) v**; **D(φ)** = $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

φ: **u**·$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$·$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = 2 = |**u**| cos(φ) = $\sqrt{5}$ cos(φ) → cos(φ) = 2/$\sqrt{5}$; sin(φ) = 1/$\sqrt{5}$

Zu beachten ist nun die Drehrichtung!

Wenn g im Uhrzeigersinn um φ gedreht wird, liegt g in der x-Achse (spezielle Geometrie). Durch Drehung im Gegenuhrzeigersinn erhalten wir aus **r**(speziell) **r**(allgemein).

Bekannt ist auch $\mathbf{D}^{-1}(\varphi)$ = **D(-φ)**.

Mit dem aus **u** und x-Achse berechneten φ ist also

r(allgemein) = **D(-φ)** **r**(speziell) = $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

r(allgemein) = $1/2\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{5} + 1/2\sqrt{5} \\ -\sqrt{3}/2\sqrt{5} + 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}998 \\ -0{,}0599 \end{pmatrix}$

eventuelle Kontrolle: **u** = **D(-φ) u**(speziell) {**u**(speziell) ≡ x-Achse}

u = $1/2\sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☑ {gleiche Richtung wie Original **u**(allgemein)}

♦ 7B Reflexionspunkt O

O ist der Schnittpunkt von **e** durch **P**(3 | 7) mit g.

e(allgemein) = $1/2\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/\sqrt{5} + 1/2\sqrt{5} \\ \sqrt{3}/2\sqrt{5} + 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}551 \\ 0{,}835 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt - vereinfacht nur mit Zahlenwert: $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}551 \\ 0{,}835 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

-0,551 t - 2 s = -1 ∧ 0,835 t + s = -3 → t = -6,26; s = 2,23

e mit t: **O**(6,45 | 1,78); Kontrolle, g mit s: **O**(6,46 | 1,77) ("OK")

♦7C Vollständige Lösung

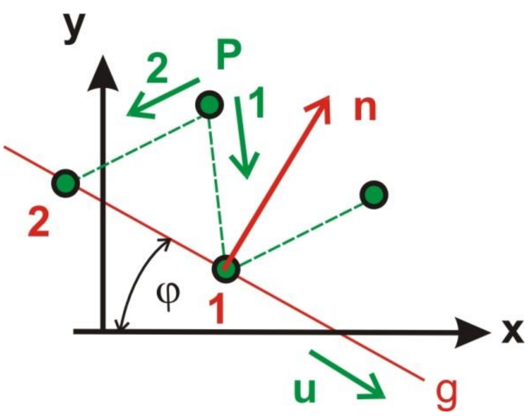
Bisher haben wir den einfallenden Strahl, ausgehend von **P** in der Richtung "1" gezeichnet. Ein Strahl in Richtung "2" hat denselben Winkel (Betrag!) zwischen **e** und g bzw. zwischen **e** und **n**.

In der speziellen Geometrie tauschen dann einfach **P** und **Q** die Plätze.

Damit in der speziellen Geometrie

e = $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, **r** = $\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Die Schnittpunkte mit g sind verschieden.



Als Lösung "2" folgt dann:

e(allgemein) = $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{5} + 1/2\sqrt{5} \\ -\sqrt{3}/2\sqrt{5} + 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}998 \\ -0{,}0599 \end{pmatrix}$

r(allgemein) = $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/\sqrt{5} + 1/2\sqrt{5} \\ \sqrt{3}/2\sqrt{5} + 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}551 \\ 0{,}835 \end{pmatrix}$

{Vertauschung von **e** und **r** gegenüber "1!}

Mit analogem Ansatz wie bei "1": t = -6,26; s = - 2,63 und **O**(-3,25 | 6,63)

♦ 7D Kann die "Reflexionsformel" benutzt werden?

Bei Kenntnis von **P** und **O** ist **e** einfach $\overrightarrow{\mathbf{PO}}$. Wenn nur der Reflexionswinkel gegeben ist, sind beide Punkte nicht bekannt. Ein Vektor in dieser Richtung, also kollinear zu $\overrightarrow{\mathbf{PO}}$, lässt sich nach dem Vorigen angeben.

e'(speziell) = $\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ist ein Einheitsvektor $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$.

Damit als $\overrightarrow{\mathbf{PO}}$ **e**(speziell) = $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Damit e im allgemeinen System:

e = **D(-φ) e**(speziell) = $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Mit den Zahlenwert sin(α) = $\sqrt{3}/2$; cos(α) = 1/2 und cos(φ) = $2/\sqrt{5}$, sin(φ) = $1/\sqrt{5}$:

e = $1/2\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = 1/\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 - 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}551 \\ -0{,}835 \end{pmatrix}$

{Das ist der Gegenvektor zum in b) angegebenen Vektor **e**(allgemein) - wie gefordert, da hier die umgekehrte Richtung angesetzt wird.}

n·n = 5, **e·n** = $-\sqrt{5}$ / 2

r = **e** - 2 (**e·n** / **n·n**) **n** = $1/\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 - 1 \end{pmatrix}$ - 2 (-1 / $2\sqrt{5}$) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

= $1/\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}998 \\ -0{,}0599 \end{pmatrix}$ {wie vorher **r**(allgemein)}

r(allgemein) = $1/2\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{5} + 1/2\sqrt{5} \\ -\sqrt{3}/2\sqrt{5} + 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}998 \\ -0{,}0599 \end{pmatrix}$

! **Wichtiger Hinweis:** Der hier benutzte Weg zur Bestimmung von φ mit dem Skalarprodukt und das hier benutzte **D(-φ)** für die Transformation "speziell nach allgemein" gelten für eine fallende Gerade mit der Wahl von **u** wie in der Skizze. Allgemeines zur Wahl der Drehmatrix steht bei 10C.