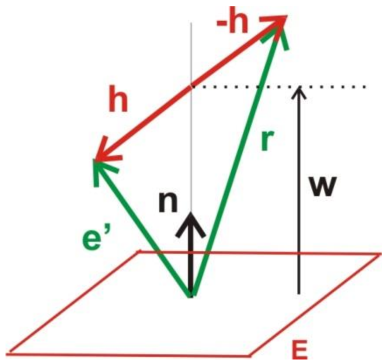
Reflexion - Teil 3

1. Formel unter Verwendung von Vektoren (1. - 7. in R^2)
2. Fallunterscheidung: Beispiele zu 1.
3. Beispiel - Reflexionspunkt bekannt
4. Muss zur Berechnung von **r** der Reflexionspunkt bekannt sein?
5. Beispiel - Reflexion und Spiegelpunkt
6. Beispiel - Suche des Reflexionspunkts
7. Beispiel - Einfallswinkel gegeben
8. **Formel in R^3**
9. **Beispiele zu R^3**
10. Behandlung mit einem Matrixformalismus (R^2)

8. Formel in R^3

♦ **Es gilt die gleiche Formel wie für R^2!**



Die Skizze unter Verwendung der Projektion von **e'** auf **n** und des horizontalen Vektors **h** gilt analog.
Es gelten die Vektorbeziehungen

e' = **w** + **h**

r = **w** + (-**h**)

Damit **r** = -**e'** + 2 (**e'**·**n**) **n**

Allgemein mit **e** = - **e'** und nicht normiertem **n**

$$\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\,\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}$$

♦ **ZU BEACHTEN!**

1. Als "Einfalls- und Ausfallswinkel" <u>sollen</u> die Winkel zwischen Vektor und dem Normalvektor (Lot) benutzt werden. Winkel zwischen einem Vektor **e** oder **r** und einem Vektor in der Ebene hängen davon ab, welcher Vektor in der Ebene eingesetzt wird. (Nur einer davon wäre dann richtig.) Der Winkel zur Normalen ist aber eindeutig.
2. Die Vektoren **e**, **r** und **n** <u>müssen</u> in <u>einer</u> Ebene liegen! Nur dann ist die - auch in der Skizze angedeutete - Herleitung richtig.
   Zur Unterscheidung von einer Ebene, an der eine Reflexion erfolgt, nennen wir diese Ebene "Einfallsebene".

In R^2 sind beide genannten Forderungen automatisch erfüllt und daher wird vor allem die 2. Forderung nicht mehr explizit genannt. Es liegt stets nur 1 Ebene vor. Für **e** bzw. **n** können prinzipiell auch die Gegenvektoren **-e** bzw. **-n** verwendet werden. Wie sich das auf die Lösung **r** auswirkt, wurde vorher "1." detailliert genannt.
In R^3 kann - als formale Übung oder als Rechenkontrolle - überprüft werden, ob die Forderung 2 erfüllt ist. Dann sind die drei Vektoren voneinander linear abhängig.

9. Beispiele zu R^3

➔ Die Forderung, dass **e**, **r**, **n** in <u>einer</u> Ebene liegen, ist durch die Aufgabenstellungen erfüllt.

Jeweils ist schnell eine anschauliche Überprüfung möglich.

9A - 9C: Bei einer Reflexion an einer Ebene ist **n** einfach anzugeben, dann kann die Reflexionsformel benutzt werden.

9D - 9E: Bei einer Reflexion an einer Geraden ist **n** nicht einfach durch "Koordinatenvertauschung und Vorzeichenwechsel" wie in R^2 anzugeben. Ein "Lot-Fusspunkt-Verfahren" ist nötig.

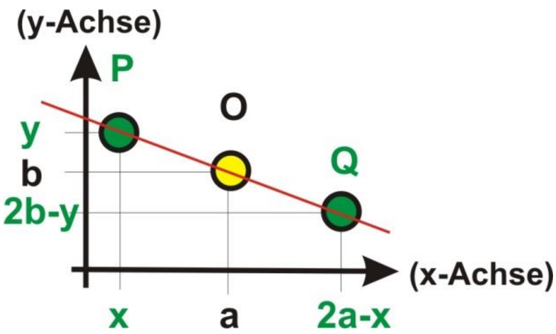
♦ 9A Reflexion an der x-y-Ebene

Von **P**(x | y | z) fällt ein Strahl auf **O**(0 | 0 | 0) in der x-y-Ebene. Anschaulich erwarten wir für **Q** nach der Reflexion die gleiche z-Koordinate und das Negative der x-, y-Koordinate.

$\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{PO}}$ $\{\mathbf{e} = \mathbf{o} - \mathbf{p}\} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{n{\cdot}n} = 1$; $\mathbf{e{\cdot}n} = -z$

$\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\,(\mathbf{e{\cdot}n} / \mathbf{n{\cdot}n})\,\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} - (-2z)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$

$\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ $\{\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{o}\} \rightarrow$ **Q**(-x | -y | z) ☑



Wenn **O** allgemein in der x-y-Ebene liegt, **O**(a | b | 0), verschieben sich die Koordinaten relativ zu **O**.

O: x + (a - x) = a

Q: x + 2 (a - x) = 2 a - x

O: y - (y - b) = b

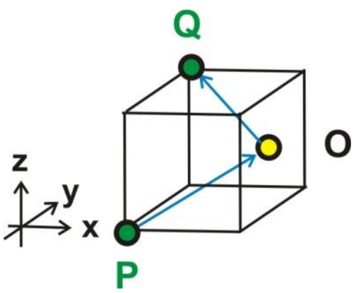
Q: y - 2 (y - b) = 2 b - y.

$\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{PO}} = \begin{pmatrix} a-x \\ b-y \\ -z \end{pmatrix}$

$\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\,(\mathbf{e{\cdot}n} / \mathbf{n{\cdot}n})\,\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a-x \\ b-y \\ -z \end{pmatrix} - (-2z)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x \\ b-y \\ z \end{pmatrix}$

$\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathbf{OQ}} \rightarrow$ **Q**(a -x +a = 2 a - x | b - y + b = 2 b - y | z + 0 = z) ☑

♦ 9B Reflexion an einer Würfelseite



Ein einfallender Strahl geht von **P**(0 | 0 | 0) auf die Mitte der gegenüberliegenden Seite (parallel zu y-z-Ebene). Anschaulich sehen wir, dass nach der Reflexion der Punkt **Q** erreicht wird. Reflexionspunkt **O**(a | a/2 | a/2).

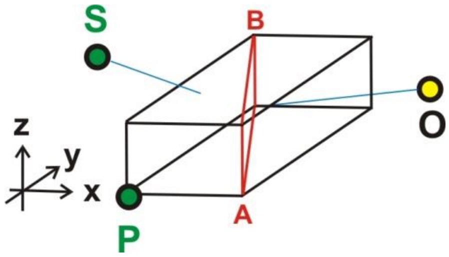
In z erreicht man die doppelte Höhe, in y ebenfalls das Doppelte, x bleibt gleich - also **Q**(0 | a | a).

$\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{PO}} = \begin{pmatrix} a \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{n{\cdot}n} = 1$; $\mathbf{e{\cdot}n} = -a$

$\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathbf{OQ}} = \begin{pmatrix} a \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix} - 2\,(-a)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \mathbf{o} = \begin{pmatrix} -a+a \\ a/2+a/2 \\ a/2+a/2 \end{pmatrix}$; **Q**(0 | a | a) ☑

♦ 9C Reflexion an einer Diagonalfläche in einem Quader

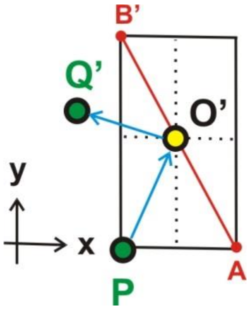
Ein Quader mit den Seitenlängen a, b, c liegt vor.
Der einfallende Strahl fällt von der vorderen linken Ecke **P**(0 | 0 0) auf die Mitte der Diagonalebene durch **A**(a | 0 | 0) und **B**(0 | b |c).
Der reflektierte Strahl schneidet die y-z-Ebene im Punkt **S**.



O kann unmittelbar angegeben werden: **O**(a/2| b/2 | c/2)
Wenn ein Würfel a = b = c vorliegt, vermuten wir nach dem vorigen Ergebnis **S**(* | * | a).
Für einen Quader ist eine Vermutung schwerer.

Tatsächlich gilt nicht mehr dasselbe wie für den Würfel.
Die allgemeine Lösung ist **S**(0 | 2b (a^2 - b^2) / (a^2 - $3b^2$) | ($-2b^2c$ / (a^2 - $3b^2$)).
Nur die allgemeine Lösung für den Reflexionspunkt **Q** enthält c als z-Koordinate,
Q(a - $2ab^2$ / (a^2 + b^2) | b - $2a^2b$ / (a^2 + b^2) | c)

Zur Lösung zuerst eine Skizze in der x-y-Ebene.
B' = Projektion von **B** auf die x-y-Ebene



Die Diagonale von **A** nach **B'**: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$

Damit die Normale $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix}$

O'(a/2 | b/2) $\rightarrow \mathbf{e} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = a^2 + b^2$; $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = -ab$

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} - 2\,(-ab\,/(a^2 + b^2)) \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix}$

$\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathbf{O'Q'}}$ {**r** = **q'** - **o'**} $\rightarrow \mathbf{q'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - 2\,/\,(a^2 + b^2) \begin{pmatrix} a\,b^2 \\ a^2 b \end{pmatrix}$

Damit sind schon Teile der Rechnung in R^3 auch bekannt.
Die z-Koordinate von **Q** = c, weil **O** die z-Koordinate c/2 hat.
Die x-, y-Koordinaten von **Q** sind gleich denen von **Q'**.
{Vektor als Summe von Vektoren der Komponenten!}

Zusätzlich kann überlegt werden:
In R^3 hat **n** die z-Komponente 0, weil die Diagonalebene senkrecht auf der x-y-Ebene.
Formal kann dies bestätigt werden. 2 Vektoren in dieser Ebene sind
a) die Diagonale $\overrightarrow{\mathbf{AB'}}$ und b) die z-Achse. Senkrecht darauf steht

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ und das ist kollinear zum vorigen **n**. (Vergleich x-y-Koordinate)

Auch für **r** sind die wesentlichen Teile schon bekannt.

$\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}\,/\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}$

$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = -ab$; $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = a^2 + b^2$

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix} - (-2ab)/(a^2 + b^2) \begin{pmatrix} -b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$

(Die x- und y-Komponente wurde schon vorher berechnet, die z-Komponente ist c/2.)

Zu berechnen ist der Schnittpunkt einer Geraden (Richtungsvektor **r**) g: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ c/2 \end{pmatrix}$

mit der y-z-Ebene E. Am einfachsten ist E: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gleichungssystem:
$a/2 + t\, \{ a/2 - 2ab^2 / (a^2 + b^2)\} = 0$
$b/2 + t\, \{b/2 - 2a^2b / (a^2 + b^2)\} = s$
$c/2 + t\, c/2 = w$
$t = -a / 2\, \{ a/2 - 2\, ab^2 / (a^2 + b^2) \} = - (a^2 + b^2) / (a^2 + b^2 - 2b^2) = - (a^2 + b^2) / (a^2 - 3b^2)$
$s = b/2 + \{ - (a^2 + b^2) / (a^2 - 3b^2)\}\, \{ b/2 - 2a^2b / (a^2 + b^2)\}$
$\quad = b/2 + \{(- a^2b - b^3) / 2\, (a^2 - 3b^2) \} + \{2a^2b / (a^2 - 3b^2)\}$
$\quad = \{1 / 2\, (a^2 - 3b^2) \}\, \{a^2b - 3b^3 - a^2b - b^3 + 4a^2b\} = 2b\, (a^2 - b^2) / (a^2 - 3b^2)$
$w = c/2\, \{1 - (a^2 + b^2) / (a^2 - 3b^2)\} = c/2\, \{a^2 - 3b^2 - a^2 - b^2\} = - 2b^2c / (a^2 - 3b^2)$
Schnittpunkt mit E:

$\mathbf{x} = \{2b\, (a^2 - b^2) / (a^2 - 3b^2)\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \{- 2b^2c / (a^2 - 3b^2)\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

S$(0 \mid 2b\, (a^2 - b^2) / (a^2 - 3b^2) \mid (-2b^2c / (a^2 - 3b^2))$.

♦ <u>*Einfacher ist ein Zahlenbeispiel*</u>
a = 4, b = 8, c = 2 → **Q** (-12/5 | 24/5 | 2); **S**(0 | 48/11 | 16/11)
Q hat, wie erwartet, die z-Koordinate c. Für **S** ist die z-Koordinate < c.

• *Zuerst die x-, y-Komponenten von **r** und **q** in R^2*

Die Diagonale von **A** nach **B'**: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 - a = -a \\ b - 0 = b \end{pmatrix}$

Damit die Normale $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

O'(a/2 | b/2) → $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 5$; $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = 8$

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\, (8 / 5) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathbf{O'Q'}}$ $\{\mathbf{r} = \mathbf{q'} - \mathbf{o'}\} \to \mathbf{q'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -22/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12/5 \\ 24/5 \end{pmatrix}$

• *Nun in R^3*

Mit dem berechneten **q'** und der z-Koordinate c: $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -12/5 \\ 24/5 \\ 2 \end{pmatrix}$

O hat die z-Koordinate c/2: $\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; **n** hat die z-Komponente 0: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r} = \mathbf{e} - 2\, (\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} / \mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\, \mathbf{n}$; $\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{PO}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = 8$; $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 5$

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\, (8 / 5) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix}$; { Kontrolle: $\mathbf{q} = \mathbf{o} + \mathbf{r} = = \begin{pmatrix} -12/5 \\ 24/5 \\ 2 \end{pmatrix}$ }

Schnitt der Geraden g: **x o + t r** = $\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ + t $\begin{pmatrix}-22/5\\4/5\\1\end{pmatrix}$ mit der y-z-Ebene **x** = $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ + s $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ + w $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

2 - 22/5 t = 0 ∧ 4 + 4/5 t = s ∧ 1 + t = w → t = 5/11; s = 48/11; w = 16/11

Schnittpunkt **S**: **s** = $\begin{pmatrix}0\\48/11\\16/11\end{pmatrix}$

♦ *Anmerkung: Würfel*

Für einen Würfel a = b = c entsteht **Q** = **S**(0 | 0 |a).

Dies ist anschaulich einzusehen. Die z-Koordinate wird an a/2 um den gleichen Betrag nach oben verschoben. In der x-y-Ebene ist der einfallende Strahl eine Normale auf die Diagonale, wird also in Richtung Ausgangspunkt zurückgespiegelt.

♦ 9D Reflexion an einer Geraden

Gegeben sind ein Punkt **P** und eine Gerade g: **x** = **a** + t **u**. Von **P** fällt ein Strahl auf g und wird dort am Punkt **O** reflektiert.

➔ Diese Aufgabe ist in R^2 einfach zu lösen. Wir erzeugen künstlich ein R^3-Problem, indem wir alle Vektoren in einer zur x-y-Ebene parallelen Ebene anordnen.

e ist als $\overrightarrow{\mathbf{PO}}$ bekannt. **n** ist aber in R^3 nicht einfach aus dem Richtungsvektor der Geraden anzugeben. Es existieren unendlich viele Normalen auf eine Gerade in R^3.

Eine Möglichkeit ist, ein Lot-Fußpunkt-Verfahren zu benutzen.

1. Aufstellen einer Ebene senkrecht zu g und durch **P**
2. Der Schnitt dieser Ebene mit g liefert den Punkt **S**
3. Der Vektor $\overrightarrow{\mathbf{SP}}$ steht dann senkrecht auf g und liegt ein einer Ebene mit **e** und g.
4. Mit der Reflexionsformel kann **r** berechnet werden - und falls gewünscht daraus **Q**.

♦ *Zuerst eine Situation in R^2*

P(2 | 5); g von **A**(1 | 2) nach **B**(4 | 3); Reflexionspunkt **O**(7 | 4).

u = $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; **n** = $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$; **e** = $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$; **e·n** = -8; **n·n** = 10; **r** = $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ - 2 (-4/5) $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}17/5\\19/5\end{pmatrix}$

q = **o** + **r** → **Q**(52/5 | 39/5)

♦ *Daraus die äquivalente Situation in R^3 (Alles in einer Ebene mit z = k)*

P(2 | 5 | k); g von **A**(1 | 2 | k) nach **B**(4 | 3 | k); Reflexionspunkt **O**(7 | 4 | k).

u = $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$; **e** = $\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix}$

n kann nicht direkt aus **u** angegeben werden. **n** liegt aber in einer Ebene senkrecht zu g. Auch dafür gibt es unendlich viele Möglichkeit entlang g. Ausgewählt wird eine, die auch **P** enthält.

Für die Ebene ist am einfachsten die Normalenform E: (**x** - **p**)·$\mathbf{n_E}$ = 0

$\mathbf{n_E}$ ist gleich dem Richtungsvektor **u** der Geraden.

E: **x·u** = **p·u** = $\begin{pmatrix}2\\5\\k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ = 11

Der Schnittpunkt E / g folgt durch Einsetzen von g in E,

x·u = (**a** + t **u**)·**u** = **a·u** + t **u·u** = $\begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ + t $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ = 5 + 10 t = 11 → t = 3/5

Damit **s** = $\begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix}$ + 3/5 $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix}14/5\\13/5\\k\end{pmatrix}$ und **n** = **p** - **s** = $\begin{pmatrix}-4/5\\12/5\\0\end{pmatrix}$ → **n** = $\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$

e·**n** = -8; **n**·**n** = 10; **r** = $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - 2 (-4/5) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 17/5 \\ 19/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

q = $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 17/5 \\ 19/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 52/5 \\ 39/5 \\ k \end{pmatrix}$

Q liegt in der gleichen Ebene mit z = k wie **P**, **O**. Die Gerade g, **u** und **n** liegen in einer zur Ebene mit z = 0 parallelen Ebene und haben daher die z-Koordinate 0.

♦ *In diesem Fall ist auch ein anderer Weg (ohne die normale Hilfsebene) möglich:*
n liegt in der Ebene, in der **e** und g liegen. (Dann liegt mit der Reflexionsbedingung auch **r** in dieser Ebene.) **n** ist damit auch eine Linearkombination von **e** und **u**. Und **n** ⊥ **u**.

n = σ **u** + τ **e** = σ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ + τ $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3\sigma + 5\tau \\ \sigma - \tau \\ 0 \end{pmatrix}$; **n**·**u** = 10σ + 14τ = 0; σ = -7τ / 5

Um einen der kollinearen Vektoren anzugeben, wird ein Parameter festgelegt, z.B. τ = 1.

Dann **n** = $\begin{pmatrix} 4/5 \\ -12/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒ Dasselbe **n** wie vorher! (Der Rest der Rechnung wie vorher.)

♦ 9E Weg über einen Spiegelpunkt

1. Eine Hilfsebene E erstellen, die auf **u** senkrecht steht und durch **P** geht.
   Damit ist **u** die Normale **n** der Ebene; Normalenform E: **n**·**x** = **n**·**p**
   Gerade g: **x** = **a** + t **u** als allgemeinen Punkt **x** einsetzen; Lösung t
2. Einsetzen der Lösung t in g liefert den Schnittpunkt **S**.
3. Vektor $\overrightarrow{\mathbf{PS}}$
4. Der Spiegelpunkt **P'** liegt "auf der anderen Seite von g": **p'** = **p** + 2 $\overrightarrow{\mathbf{PS}}$
5. Der gespiegelte einfallende Vektor ist $\overrightarrow{\mathbf{P'O}}$
   Durch Reflexion wird der Punkt **Q** erreicht, **q** = **p'** + 2 $\overrightarrow{\mathbf{P'O}}$

{Die Anfangsrechnungen sind identisch den vorigen.}

P(2 | 5 | k); g von **A**(1 | 2 | k) nach **B**(4 | 3 | k); Reflexionspunkt **O**(7 | 4 | k).

1. **u** = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; **n** = **u**; E: **x**·**n** = **p**·**n** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = 11
   g in E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ + t $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = 5 + 10 t = 11 → t = 3/5
2. **s** = $\begin{pmatrix} 14/5 \\ 13/5 \\ k \end{pmatrix}$
3. Vektor vom Aufpunkt zum Schnittpunkt mit g $\overrightarrow{\mathbf{PS}}$ = $\begin{pmatrix} 14/5 - 2 = 4/5 \\ 13/5 - 5 = -12/5 \\ k - k = 0 \end{pmatrix}$
4. Spiegelpunkt **P'**: **p'** = **p** + 2 $\overrightarrow{\mathbf{PS}}$ = $\begin{pmatrix} 2 + 8/5 = 18/5 \\ 5 - 24/5 = 1/5 \\ k + 0 = k \end{pmatrix}$

5. Vektor Spiegel zum Reflexionspunkt: $\overrightarrow{\mathbf{P'O}} = \begin{pmatrix} 7 - 18/5 = 17/5 \\ 4 - 1/5 = 19/5 \\ k - k = 0 \end{pmatrix}$

Punkt **Q** auf dem reflektierten Strahl: $\mathbf{q} = \mathbf{p'} + 2\,\overrightarrow{\mathbf{P'O}} = \begin{pmatrix} 18/5 + 34/5 \\ 1/5 + 38/5 \\ k + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52/5 \\ 39/5 \\ k \end{pmatrix}$

♦ 9F Vergleich Ebene, Gerade

Bei der Reflexion an einer Ebene existiert eindeutig 1 Normale. Schwierigkeiten könnten nur auftreten, wenn die Aufgabenstellung fehlerhaft ist. (Ein angegebener Reflexionspunkt liegt gar nicht in der Ebene oder **P** und **Q** liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene.)

Bei der Reflexion an einer Geraden muss analog ein angegebener Reflexionspunkt tatsächlich auf der Geraden liegen. Hier gibt es keine 2 "verschiedenen Seiten". Es muss aber erfüllt sein, dass **e**, **r** und **n** in einer Ebene liegen.

♦ Bei b) wurde die Reflexion an einer y-z-Ebene (eine Würfelseite) berechnet.

Wie müsste eine Gerade definiert werden, damit dasselbe Ergebnis Q entsteht?

Ausgangspunkt **P**(0 | 0 | 0); Reflexionspunkt **O**(a | a/2 | a/2); $\mathbf{e} = \overrightarrow{\mathbf{PO}} = \begin{pmatrix} a \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$

Es soll durch die Reflexion **Q**(0 | a | a) erreicht werden.

Vektoren in der vorher als Reflexionsebene angegebenen y-z-Ebene sind $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Der Richtungsvektor einer Geraden muss also auch von dieser allgemeinen Form sein.

Die Forderung, dass **Q** erreicht wird, ist durch alle Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ w \end{pmatrix}$ erfüllt.

Mit diesen "Diagonalen" ist g: $\mathbf{x} = \mathbf{o} + t\,\mathbf{u}$.
Hilfsebene in der Normalenform durch **P** und mit **u** als Normale: E: $(\mathbf{x} - \mathbf{p})\cdot\mathbf{u} = 0$
Schnittpunkt E mit g: $\mathbf{o}\cdot\mathbf{u} + t\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{u} = 0$. $\mathbf{o}\cdot\mathbf{u} = aw$; $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 2\,w^2$; $\mathbf{p}\cdot\mathbf{u} = 0$
Lösung von $aw + 2tw^2 = 0$: $t = -a / (2w)$

Einsetzen von t in g für Schnittpunkt **S**: $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit ist die gesuchte Normale auf g in Richtung **P**: $\mathbf{n} = \overrightarrow{\mathbf{SP}} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = -a^2$; $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = a^2$; $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix} - 2\,(-a^2 / a^2) \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$; **Q** $\{\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{o}\}$: $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ ☑

{Mit $\mathbf{r} - \mathbf{e} = 2\,\mathbf{n}$ ist die geforderte lineare Abhängigkeit verifiziert.}

♦ Bei c) wurde die Reflexion an einer Diagonalebene eines Quaders berechnet.

Wie müsste hier eine Gerade definiert werden?

{Die Rechnung ist umständlicher, aber durchführbar - weil das erwartete **n** bekannt ist.}

Gerade g: $\mathbf{x} = \mathbf{o} + t\,\mathbf{u}$. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ z \end{pmatrix}$ mit $z = c\,(a^2 + b^2) / (a^2 - b^2)$.

Ein möglicher Weg.

Der gesuchte Vektor **u** ist der Richtungsvektor einer Gerade in der Ebene durch **A** und **B,**

Ansatz E: $\mathbf{x} = \mathbf{o} + \lambda\ \mathbf{v_1} + \mu\ \mathbf{v_2}$; $\mathbf{v_1}^T = (0, 0, c)$, $\mathbf{v_2} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

Damit $\mathbf{u}^T = (\mu a, -\mu b, (\lambda-\mu)c)$. Dann Aufstellen der normalen Hilfsebene durch **O**, Schnitt mit der Geraden (**S**) und Berechnung von $n = \overrightarrow{\mathbf{SP}}$. Bekannt ist aus der obigen Behandlung mit der Ebene, dass die z-Komponente von **n** 0 sein muss.

Dies liefert Gleichungen für λ und μ, und damit **u**.

- Die Lösung ist oben angegeben.

- Die andere Lösung führt zu g: $\mathbf{x} = \mathbf{o} + \mathbf{v_1}$. Damit entsteht **Q**(0 | 0 | c).

Grund ist, dass dieses **x** nicht nur in der verwendeten Ebene liegt, sondern in unendlich vielen anderen "um $\mathbf{v_1}$ herum". Die Reflexionsformel wählt dann eine andere davon aus!
Im Fall der entsprechenden Diagonalebene eines Würfels ist nach diesem Verfahren nur diese zweite Lösung möglich.