# Reflexion - Teil 4

1. Formel unter Verwendung von Vektoren (1. - 7. in $R^2$)
2. Fallunterscheidung: Beispiele zu 1.
3. Beispiel - Reflexionspunkt bekannt
4. Muss zur Berechnung von **r** der Reflexionspunkt bekannt sein?
5. Beispiel - Reflexion und Spiegelpunkt
6. Beispiel - Suche des Reflexionspunkts
7. Beispiel - Einfallswinkel gegeben
8. Formel in $R^3$
9. Beispiele zu $R^3$
10. **Behandlung mit einem Matrixformalismus ($R^2$)**

## 10. Matrixformalismus

**Eine Behandlung mit Matrizen ist möglich.**

### ♦ 10A Herleitung

Das Prinzip wird hier an einem Beispiel in $R^2$ gezeigt.
In der speziellen Geometrie findet nur eine Koordinatenvertauschung statt.
**P**(x | y) → **Q**(-x | y).
Eine Reflexion ist bezüglich einer Gerade definiert. Diese Gerade ist im allgemeinen gegenüber der x-Achse gedreht Eine Drehung ist durch eine Drehmatrix **D(φ)** beschreibbar.

Für eine Drehung mit j im Gegenuhrzeigersinn $\mathbf{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Umkehrung = Gegendrehung: $\mathbf{D}^{-1}(\varphi) = \mathbf{D}(-\varphi)$.
Wichtig ist, dass dabei um den Ursprung gedreht wird. Wir müssen also vor der Behandlung der Drehung dafür sorgen, dass der Reflexionspunkt **O** in den Ursprung verschoben wird. Die Operation **T** soll diese Translation durchführen.

Damit ist das schrittweise Vorgehen:
1. Verschiebung mit **T**
2. Drehung, damit g in der x-Achse liegt
3. Reflexion für **P** im speziellen System
4. Erhaltenes **Q** zurückdrehen (für Original-Orientierung von g)
5. Zurückverschieben zur Original-Lage von **O**

Zu 1. Wenn $\mathbf{O}_{\text{ORIGINAL}}(x_o \mid y_o)$ gilt für jeden Punkt $\mathbf{P}_{\text{SPEZIELL}}(x - x_o \mid y - y_o)$

Zu 2. φ sei der Winkel zwischen **u** und der x-Achse. Es ist $\mathbf{u}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\,\mathbf{u}\,|\cos(\varphi)$.

Wir nehmen an, dass eine steigende Gerade vorliegt. φ ist der Winkel zwischen g und der x-Achse (mathematisch positiver Winkel). Damit g auf die x-Achse gedreht wird, ist dann um -φ zu drehen. Die erste anzuwendende Drehmatrix ist also **D(-φ)**.
Eine genauere Angabe, wie φ zu wählen ist, steht in 10C.

Zu 3. Reflexion im speziellen System: x Vorzeichenänderung, y gleich.

Damit $\mathbf{R}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$

Zu 4. Die Rückdrehung erfolgt mit $\mathbf{D}^{-1}(-\varphi) = \mathbf{D}(\varphi)$

Zu 5. Die Rückverschiebung erfolgt mit $\mathbf{Q}_{\text{ORIGINAL}}(x + x_o \mid y + y_o)$

Insgesamt formal: **Q** = $\mathbf{T^{-1}}$ **D(φ) R D(-φ) T P**
Dabei fällt auf, dass in der Mitte ein Produkt dreier Matrizen vorliegt. Dies kann in 1 Matrix zusammengefasst werden.

$\mathbf{D_{GES}} = \mathbf{D(\varphi)\ R\ D(-\varphi)} = \begin{pmatrix} -\cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{pmatrix}$

{$\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)$; $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$}

{Eine weitere Zusammenfassung ist möglich mit homogenen Koordinaten, weil dann auch die Translation durch eine Matrix beschrieben wird.}

## ♦ 10B Beispiel

*Beispiel 1*

g: **A**(1 | 1); **B**(7 | 3); **u** = $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; steigende Gerade

**P**(2 | 3); **O**(4,2); mit der Reflexionsformel: **r** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und **Q**(5 | 4).

$\cos(\varphi) = 3 / \sqrt{10}$; $\sin(\varphi) = 1 / \sqrt{10}$; ($\varphi \approx 18{,}4°$)

Zwischenwerte: T **P** = $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; **D(-φ) T P** = $\begin{pmatrix} -\sqrt{10}/2 \\ \sqrt{10}/2 \end{pmatrix}$; **D(φ) T D(-φ) P** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Reflektierter Punkt **Q**(5 | 4)

Für eine einmalige Matrixmultiplikation $\mathbf{D_{GES}} = {}^{1}/_{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

*Beispiel 2*

Für **A(**1 | 1); **B**(7 | 3) - also eine fallende Gerade - mit gleichem **P**, **O** erhält man **Q**(31/5 | 8/5).

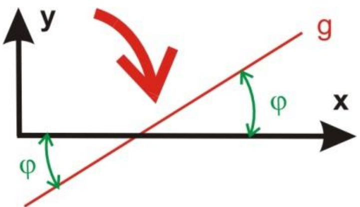
$\mathbf{D_{GES}} = {}^{1}/_{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**ANMERKUNG**: Im Matrixverfahren wird der Punkt **Q**, der durch die Reflexion entsteht, berechnet; der Reflexionspunkt **O** muss bekannt sein. In der Reflexionsformel wird der Vektor **r** aus dem Vektor **e** berechnet; nur die Normale der Reflexionsebene oder -geraden muss bekannt sein.

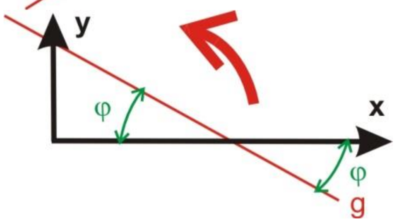
## ♦ 10C Genauere Angabe zur Bestimmung von φ

VORBEMERKUNG: Diese Überlegungen sind nur wichtig, wenn man den Weg über Drehmatrizen geht. Bei der Benutzung der Reflexionsformel muss man sich darum nicht kümmern. Die "Vorzeichenproblematik" ist dort wegen des doppelten Vorkommens von **n** in (**e**·**n**) **n** irrelevant!

Steigende Gerade g
φ ist der spitze Winkel zwischen g und der x-Achse.
g muss um φ im Uhrzeigersinn (mathematisch negativer Winkel) gedreht werden.




Fallende Gerade g
g muss um φ im Gegenuhrzeigersinn gedreht werden.



Ob eine steigende oder fallende Gerade vorliegt, wird mit der Steigung entschieden.

- Für g: y = m x + b ist die Steigung m direkt ablesbar.
- Falls g: **x** = **a** + t **u** und u über 2 Punkte **A**, **B** bestimmt wird, ist $\mathbf{u_1} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$ oder $\mathbf{u_2} = \overrightarrow{\mathbf{BA}}$ möglich. Die Steigung ist in beiden Fällen $u_y / u_x$.
- Falls g: (**x - a**)·**n** = 0 gelten die für **u** angestellten Überlegungen analog für den Winkel zwischen **n** und der y-Achse.

Der Winkel zwischen zwei Vektoren ist mit **a·b** = | **a** | | **b** | cos(α) bestimmbar. Dieser Winkel kann spitz oder stumpf sein. Wenn man nur den spitzen Winkel will, verwendet man den Betrag des Skalarprodukts. {cos(180° - α) = - cos(α)}
Wir berechnen φ mit $\mathbf{x}^\mathbf{T}$ = (1,0) über cos(φ) = | **u·x** | / | **u** |.
Dieser spitze Winkel ist gleich für $\mathbf{u_1}$ und $\mathbf{u_2}$.
Für die gewünschte Drehung "g in die x-Achse" gilt

- steigende Gerade **D(-φ)**
- fallende Gerade **D(+φ)**

In 10A wurden die Formeln für eine steigende Gerade angegeben. Wenn wir für die fallende Gerade diese Formeln anwenden wollen, ist dann anstelle von φ der Wert 180° - φ einzusetzen.

**D(φ)** = $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ und wegen cos(180° - α) = - cos(α) und sin(180° - α) = + sin(α)

ist **D(180°- φ)** = $\begin{pmatrix} -\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ = - $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ = - **D(-φ)**

180° - φ beschreibt also die Drehung mit dem anderen Drehsinn, es entsteht aber das Negative des Vektors. Für 1 Drehung allein wäre das Vorzeichen zu beachten. Bei der gesamten Transformation nach 10A wird aber zweimal gedreht (hin und zurück). Damit heben sich die Vorzeichen auf!

*Vorgehen für die Transformation nach 10A*

1. Berechnung für spitzen Winkel φ: cos(φ) = | **u·x** | / | **u** |. {sin(φ) über "$\sin^2 + \cos^2 = 1$"}
   | **u·x** | = | x-Koordinate von **u** |
2. Wenn die Steigung von g negativ ist, φ = 180° - φ verwenden.
3. Formel **Q** = $\mathbf{T^{-1}}$ **D(φ) R D(-φ) T P** verwenden.